

3.8

Dimostrazione della formula: $v_{P_1} = v_{B_1} \cdot \frac{\sin(\alpha_1 + \beta_1)}{\cos \beta_1}$

Consideriamo la configurazione generica del manovellismo di spinta rotativa di **Figura 1**. Indichiamo con α_1 l'angolo di manovella, β_1 l'angolo di biella, r la lunghezza della manovella e l quella della biella.

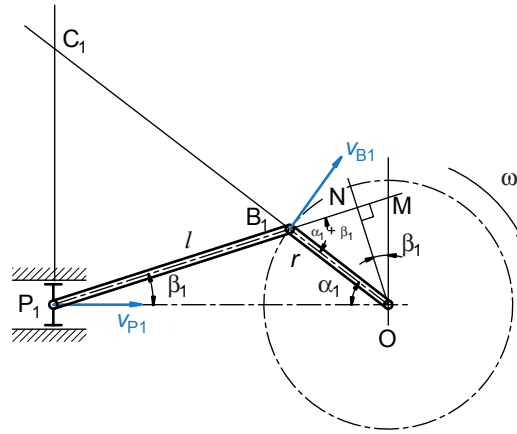


Figura 1

Prolunghiamo il segmento P_1B_1 fino a incontrare in M la verticale innalzata dal centro O .

Ci proponiamo di determinare la posizione del centro di istantanea rotazione C_1 .

A questo scopo tracciamo le normali alle traiettorie dei punti P_1 e B_1 d'estremità della biella:

- la traiettoria descritta da P_1 è rettilinea e giace sulla retta P_1O ; la normale in P_1 a questa traiettoria è quindi la retta P_1C_1 , perpendicolare in P_1 a P_1O ;
- la traiettoria di B_1 è la circonferenza di centro O e raggio OB_1 ; la normale in B_1 a questa traiettoria è quindi la retta OB_1 .

Il punto C_1 , intersezione delle rette OB_1 e P_1C_1 , è il centro di istantanea rotazione cercato.

Dal momento che i triangoli $P_1B_1C_1$ e B_1OM hanno gli angoli ordinatamente uguali, essi sono simili. Possiamo quindi scrivere la proporzione:

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{P_1C_1}}{\overline{B_1C_1}} \quad (1)$$

D'altra parte il punto B_1 , se considerato appartenente alla manovella, è caratterizzato dalla velocità:

$$v_{B_1} = \omega \cdot r \quad (2)$$

dove ω è la velocità angolare della manovella, calcolata rispetto al punto O .

Se invece lo si considera appartenente alla biella, il suo moto istantaneo è di rotazione attorno a C_1 , per cui è anche:

$$v_{B_1} = \omega_C \cdot \overline{B_1C_1} \quad (3)$$

dove ω_C è la velocità angolare della biella, calcolata rispetto al punto C_1 .

Analogamente è anche:

$$v_{P1} = \omega_C \cdot \overline{P_1C_1} \quad (4)$$

Se dividiamo membro a membro la (4) e la (3) otteniamo:

$$\frac{v_{P1}}{v_{B1}} = \frac{\omega_C \cdot \overline{P_1C_1}}{\omega_C \cdot \overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{P_1C_1}}{\overline{B_1C_1}} \quad (5)$$

In base alla (1), la (5) può scriversi:

$$\frac{\overline{P_1C_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{v_{P1}}{v_{B1}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OB_1}}$$

ovvero:

$$v_{P1} = v_{B1} \cdot \frac{\overline{OM}}{\overline{OB_1}} = v_{B1} \cdot \frac{\overline{OM}}{r} \quad (6)$$

in quanto è:

$$\overline{OB_1} = r$$

Da O si conduce la perpendicolare alla retta P_1M . Essa interseca la retta P_1M in N. L'angolo NB_1O vale $(\alpha_1 + \beta_1)$ perché, in quanto angolo esterno del triangolo P_1OB_1 , ha ampiezza pari alla somma dei due angoli interni non adiacenti α_1 e β_1 del suddetto triangolo.

La lunghezza del segmento \overline{ON} , pensato come appartenente al triangolo OB_1N , vale:

$$\overline{ON} = r \cdot \sin(\alpha_1 + \beta_1) \quad (7)$$

Se invece si considera il segmento \overline{ON} appartenente al triangolo ONM , risulta:

$$\overline{ON} = \overline{OM} \cdot \cos \beta_1 \quad (8)$$

in quanto l'angolo NOM è congruente all'angolo $B_1P_1O = \beta_1$ dal momento che i suoi lati sono a due a due perpendicolari ai corrispondenti lati dell'angolo B_1P_1O .

Dalle relazioni (7) e (8) si ricava:

$$r \cdot \sin(\alpha_1 + \beta_1) = \overline{OM} \cdot \cos \beta_1$$

cioè:

$$\overline{OM} = \frac{r \cdot \sin(\alpha_1 + \beta_1)}{\cos \beta_1} \quad (9)$$

Se si sostituisce la (9) nella (6), si ottiene:

$$v_{P1} = v_{B1} \cdot \frac{\overline{OM}}{r} = v_{B1} \cdot \frac{\frac{r \cdot \sin(\alpha_1 + \beta_1)}{\cos \beta_1}}{r}$$

ovvero, eseguite le opportune semplificazioni:

$$v_{P1} = v_{B1} \cdot \frac{\sin(\alpha_1 + \beta_1)}{\cos \beta_1} \quad (10)$$