

3.9

Velocità massima del piede di biella: $v_{\max} = v_B \cdot \frac{1}{\cos \beta_{\max}}$ per $\alpha + \beta = 90^\circ$

In base alla formula:

$$v_P = v_B \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}$$

ci proponiamo di dimostrare che il piede di biella raggiunge la sua massima velocità quando il meccanismo biella-manovella è nelle configurazioni di quadratura.

Premesse

Occorre innanzitutto fare alcune premesse:

1. È noto che la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a 180° ; nel triangolo OBP di **Figura 1** si ha perciò:

$$\alpha + \beta + \widehat{PBO} = 180^\circ$$

da cui:

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \widehat{PBO}$$

2. Nella configurazione di quadratura di **Figura 1**, biella e manovella sono tra di loro perpendicolari; ciò significa che:

$$\widehat{PBO} = 90^\circ$$

nel triangolo OBP allora risulta:

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \widehat{PBO} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

ovvero:

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

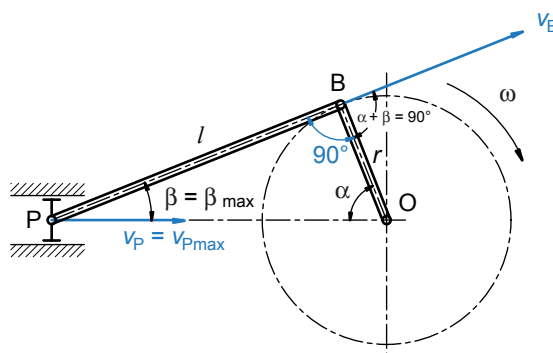


Figura 1

3. La velocità del bottone di manovella v_B è, per ipotesi, costante.

Ciò premesso, la velocità del piede di biella, espressa dalla (10):

$$v_P = v_B \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}$$

è massima quando è massimo il rapporto:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}$$

in quanto è, per ipotesi:

$$v_B = \text{cost.}$$

Questo rapporto è sicuramente massimo quando si verificano contemporaneamente le condizioni di numeratore massimo e denominatore minimo. Deve cioè risultare:

- numeratore, cioè: $\sin(\alpha + \beta)$, massimo. Questo si ha quando: $\sin(\alpha + \beta) = 1$, cioè: $\alpha + \beta = 90^\circ$;
- denominatore, cioè: $\cos \beta$, minimo. Questo si ha quando: $\cos \beta \rightarrow 0$, cioè quando $\beta \rightarrow 90^\circ$; nel nostro caso, per: $\beta = \beta_{\max}$ in quanto il valore massimo che β può raggiungere al tendere a 90° è β_{\max} .

Entrambe queste condizioni sono verificate nella configurazione di quadratura di Figura 1, dove, per effetto della perpendicolarità tra biella e manovella, è:

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

e l'angolo di biella β è massimo, cioè:

$$\beta = \beta_{\max}$$

Si ottengono gli stessi risultati se si considera, anziché la condizione di quadratura di Figura 1, quella ad essa simmetrica.

Resta così dimostrato che il piede di biella raggiunge la sua massima velocità quando il meccanismo biella-manovella è nelle configurazioni di quadratura.

Tale velocità vale:

$$v_{\max} = v_B \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} = v_B \cdot \frac{1}{\cos \beta_{\max}}$$

in quanto, se riprendiamo in esame la configurazione di quadratura di Figura 1, è:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin 90^\circ = 1$$

$$\cos \beta = \cos \beta_{\max}$$

e:

$$v_B = \text{cost.}$$