

## ESERCIZI SVOLTI

### Argomenti:

**A5** Meccanismo biella-manovella: verifica della resistenza della biella

**A6** Meccanismo biella-manovella: calcolo di  $F_{\max}$ , massima spinta assiale

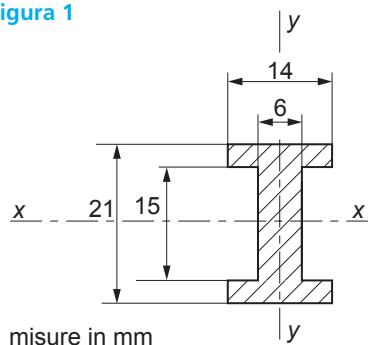
**A7** Meccanismo biella-manovella: progetto di una biella di sezione circolare piena

### A5 Esercizio 1



Verificare la biella di un motore alternativo a c.i. in base ai seguenti dati: l'albero motore, a regime, ha una frequenza di rotazione  $n_1 = 2000$  giri/min; la massa complessiva dotata di moto alternativo vale 0,8 kg; le masse dotate di moto circolare, ridotte al bottone di manovella, valgono complessivamente 0,7 kg. La biella, lunga 30 cm, è in acciaio da bonifica UNI EN ISO 683-2:2018-16 Ni Cr Mo 12 che ammette come carico unitario di rottura  $R_m = 1300$  N/mm<sup>2</sup>. La manovella ha lunghezza  $r = 9$  cm. La forza massima esercitata dai gas sulla testa del pistone in corrispondenza del P.M.S. è pari a 21 kN. La sezione della biella, che si suppone costante per tutta la lunghezza del fusto, è a doppio T, per effetto degli alleggerimenti apportati sui fianchi. Le dimensioni di tale sezione sono riportate in **Figura 1**. Lo sforzo  $F_Q$  che si esercita sul pistone quando il manovellismo è in posizione di quadratura, nel corso della fase di espansione dei gas, è pari al 30% di quello relativo alla posizione di punto morto superiore.

**Figura 1**



### SOLUZIONE

La soluzione di questo esercizio viene realizzata nelle seguenti fasi:

1. determinazione del valore della forza totale massima  $F_{\text{tot max}}$  che agisce sul pistone in corrispondenza del P.M.S.;
2. verifica a carico di punta del fusto della biella nella posizione di P.M.S.;
3. verifica a pressoflessione del fusto della biella in posizione di quadratura.

**1. Determinazione del valore della forza totale massima  $F_{\text{tot max}}$  che agisce sul pistone in corrispondenza del P.M.S.**

L'accelerazione istantanea del piede di biella al P.M.S. è data dall'espressione:

$$a_p = \omega^2 \cdot r \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)$$

In base alle relazioni:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 2000 \text{ giri/min}}{60} \approx 209,44 \text{ rad/s}$$

e:

$$\mu = \frac{l}{r} = \frac{30 \text{ cm}}{9 \text{ cm}} \approx 3,3$$

si ricava:

$$a_p = (209,44 \text{ rad/s})^2 \cdot 0,09 \text{ m} \cdot \left(1 + \frac{1}{3,3}\right) \approx 5132,22 \text{ m/s}^2$$

La forza d'inerzia applicata al piede di biella allorché il pistone è in posizione di P.M.S. è data dall'espressione:

$$F_{\text{in}} = m_{\text{tot}} \cdot a_p$$

e vale:

$$F_{\text{in}} = 0,8 \text{ kg} \cdot 5132,22 \text{ m/s}^2 \approx 4105,78 \text{ N}$$

Ne consegue che la spinta agente complessivamente sul pistone al P.M.S. è:

$$F_{\text{tot (P.M.S.)}} = F - F_{\text{in}} = (21\,000 - 4105,78) \text{ N} \approx 16\,894,22 \text{ N}$$

Questa spinta agisce assialmente sulla biella: è una forza che la comprime. Dal momento che la biella è da ritenersi una struttura snella, è necessario eseguire la verifica a carico di punta.

**2. Verifica a carico di punta del fusto della biella nella posizione di P.M.S.**

La biella può inflettersi o nel piano che ha per traccia l'asse y-y e quindi per asse neutro l'asse x-x, o nel piano perpendicolare al precedente.

Nel primo caso, il rapporto di snellezza  $\lambda_x$  vale:

$$\lambda_x = \frac{l_x}{i_x}$$

dove:  $l_x = l = 300 \text{ mm}$  in quanto i vincoli alle estremità della biella sono due cerniere e si comportano come tali.

Il raggio d'inerzia  $i_x$  è ricavabile dall'espressione:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A_{\text{fusto}}}}$$

Il momento d'inerzia  $I_x$  vale:

$$I_x = \frac{1}{12} \cdot (14 \cdot 21^3 - 2 \cdot 4 \cdot 15^3) \text{ mm}^4 = 8554,5 \text{ mm}^4$$

e l'area della sezione retta del fusto, costante per tutta la lunghezza  $l$ , vale:

$$A_{\text{fusto}} = (14 \cdot 21 - 2 \cdot 4 \cdot 15) \text{ mm}^2 = 174 \text{ mm}^2$$

Dunque, il raggio d'inerzia  $i_x$  è:

$$i_x = \sqrt{\frac{8554,5 \text{ mm}^4}{174 \text{ mm}^2}} \approx 7,01 \text{ mm}$$

e di conseguenza il rapporto di snellezza risulta:

$$\lambda_x = \frac{300 \text{ mm}}{7,01 \text{ mm}} \approx 42,8$$

Il valore di  $\lambda_x$  esclude per la verifica del fusto della biella a carico di punta l'utilizzo del metodo di Eulero in quanto si ha:

$$\lambda_x = 42,8 < \lambda_{\min (\text{Eulero})}$$

dove  $\lambda_{\min (\text{Eulero})}$ , per gli acciai speciali, è superiore a 70.

Applichiamo perciò il metodo di Rankine, secondo il quale deve essere verificata la condizione:

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{\text{ass}}}{A_{\text{fusto}}} \leq \sigma_{\text{adm (Rankine)}} = \frac{\sigma_{\text{adm compr.}}}{1 + \alpha \cdot \lambda_x^2}$$

Risulta:

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{\text{tot (P.M.S.)}}}{A_{\text{fusto}}} = \frac{16\,894,22 \text{ N}}{174 \text{ mm}^2} \approx 97,1 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{\text{adm compr.}} = \frac{R_m}{k_R} = \frac{1300 \text{ N/mm}^2}{5} = 260 \text{ N/mm}^2$$

in quanto il carico unitario di rottura dell'acciaio è  $R_m = 1300 \text{ N/mm}^2$  e si è assunto come coefficiente di sicurezza relativo alla rottura:

$$k_R = 5$$

Si ottiene quindi:

$$\sigma_{\text{adm (Rankine)}} = \frac{260 \text{ N/mm}^2}{1 + 0,00018 \cdot 42,8^2} \approx 195,53 \text{ N/mm}^2$$

dove si è posto:

$$\alpha = 0,00018$$

Dal momento che risulta:

$$\sigma_{\max} = 97,1 \text{ N/mm}^2 < 195,53 \text{ N/mm}^2 = \sigma_{\text{adm (Rankine)}}$$

la verifica a carico di punta ha esito positivo.

Nel caso di inflessione della biella nel piano che ha per traccia l'asse x-x e quindi per asse neutro l'asse y-y, il rapporto di snellezza diviene:

$$\lambda_y = \frac{l_y}{i_y}$$

dove:  $l_y = 0,7 \cdot l = 0,7 \cdot 300 \text{ mm} = 210 \text{ mm}$ , in quanto i vincoli alle estremità della biella si comportano, in questo tipo di inflessione, come incastri.

Risulta inoltre:

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot (15 \cdot 6^3 + 2 \cdot 3 \cdot 14^3) \text{ mm}^4 = 1642 \text{ mm}^4$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A_{\text{fusto}}}} = \sqrt{\frac{1642 \text{ mm}^4}{174 \text{ mm}^2}} \approx 3,07 \text{ mm}$$

e di conseguenza:

$$\lambda_y = \frac{210 \text{ mm}}{3,07 \text{ mm}} \approx 68,4$$

Anche in questo caso, per gli stessi motivi ricordati nel caso precedente, è inapplicabile il metodo di Eulero; ricorriamo allora al metodo di Rankine. Otteniamo:

$$\sigma_{\text{adm (Rankine)}} = \frac{\sigma_{\text{adm compr.}}}{1 + \alpha \cdot \lambda_y^2} = \frac{260 \text{ N/mm}^2}{1 + 0,00018 \cdot 68,4^2} = 141,14 \text{ N/mm}^2$$

Dal momento che risulta:

$$\sigma_{\text{max}} = 97,1 \text{ N/mm}^2 < 141,14 \text{ N/mm}^2 = \sigma_{\text{adm (Rankine)}}$$

anche questa verifica a carico di punta ha esito positivo.

### 3. Verifica a pressoflessione del fusto della biella in posizione di quadratura

Il carico  $F_Q$  agente sul pistone quando la biella è in posizione di quadratura, in base ai dati del problema, vale:

$$F_Q = 0,3 \cdot F_{\text{max}} = 0,3 \cdot 21\,000 \text{ N} = 6300 \text{ N}$$

In posizione di quadratura la biella assume un angolo  $\beta$  di inclinazione rispetto all'asse del cilindro, ricavabile dalla relazione:

$$\beta = \arctg \frac{r}{l} = \arctg \frac{1}{\mu}$$

in quanto, in tale configurazione del manovellismo, biella e manovella sono tra di loro perpendicolari.

Risulta:

$$\beta = \arctg \frac{1}{3,3} = 16,7^\circ$$

Il carico  $F'_Q$  è l'unica forza che agisce assialmente sulla biella in posizione di quadratura. Infatti la forza alternativa d'inerzia è nulla in quanto in tale configurazione è  $a_p = 0$ . Risulta:

$$F'_Q = \frac{F_Q}{\cos \beta} = \frac{6300 \text{ N}}{\cos 16,7^\circ} \approx 6577,4 \text{ N}$$

Questa forza genera una tensione di compressione  $\sigma_N$  pari a:

$$\sigma_N = \frac{F'_Q}{A_{\text{fusto}}} = \frac{6577,4 \text{ N}}{174 \text{ mm}^2} \approx 37,8 \text{ N/mm}^2$$

D'altra parte occorre tener conto anche del fenomeno del colpo di frusta determinato dalla forza centrifuga  $F_c$ . L'inflessione che ne consegue è caratterizzata da un momento flettente che è massimo nella sezione distante  $l/\sqrt{3}$  dal piede di biella e che vale, con la (8):

$$M_{f \text{ max}} = F_c \cdot \frac{2 \cdot l}{9 \cdot \sqrt{3}} \approx 0,128 \cdot F_c \cdot l$$

Dal momento che l'accelerazione centrifuga  $a_c$  vale:

$$a_c = \omega^2 \cdot r = (209,44 \text{ rad/s})^2 \cdot 0,09 \text{ m} \approx 3947,86 \text{ m/s}^2$$

la forza centrifuga diviene:

$$F_c = \frac{m_c \cdot a_c}{2} = \frac{0,7 \text{ kg} \cdot 3947,86 \text{ m/s}^2}{2} \approx 1368,25 \text{ N}$$

Conseguentemente si ha:

$$M_{f \max} = 0,128 \cdot 1368,25 \text{ N} \cdot 0,3 \text{ m} \approx 53,059 \text{ Nm} \approx 53\,059 \text{ Nmm}$$

Dato che il modulo di resistenza a flessione  $W_x$  è pari a:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{8554,5 \text{ mm}^4}{10,5 \text{ mm}} \approx 814,71 \text{ mm}^3$$

la tensione interna massima dovuta alla flessione risulta, secondo la formula di Navier:

$$\sigma_{\max M} = \frac{M_{f \max}}{W_x} = \frac{53\,059 \text{ Nmm}}{814,71 \text{ mm}^3} \approx 65,125 \text{ N/mm}^2$$

La tensione interna complessiva  $\sigma_{\max \text{ tot}}$  deve pertanto soddisfare la condizione:

$$\sigma_{\max \text{ tot}} = \sigma_N + \sigma_{\max M} \leq \sigma_{\text{adm compr.}}$$

Risulta:

$$\sigma_{\max \text{ tot}} = (37,8 + 65,125) \text{ N/mm}^2 \approx 102,93 \text{ N/mm}^2$$

Dato che è:

$$\sigma_{\max \text{ tot}} = 102,93 \text{ N/mm}^2 < 260 \text{ N/mm}^2 = \sigma_{\text{adm compr.}}$$

anche la verifica a pressoflessione del fusto della biella ha esito positivo.

#### A5 Esercizio 2

Un motore alternativo a c.i. monocilindrico a due tempi presenta le seguenti caratteristiche:

alesaggio = diametro della sezione normale del cilindro:  $d_{\text{st}} = 60 \text{ mm}$ ;

corsa dello stantuffo:  $c = 120 \text{ mm}$ ;

lunghezza della biella:  $l = 180 \text{ mm}$ ;

frequenza di rotazione, a regime:  $n_1 = 1500 \text{ giri/min}$ ;

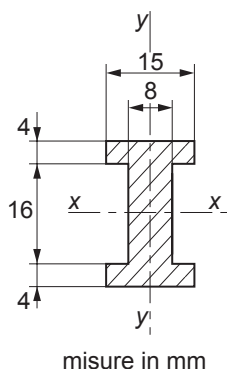
pressione massima in prossimità del P.M.S.:  $p_{\max} = 40 \text{ bar}$ ;

pressione del fluido quando il manovellismo è in quadratura nel corso della fase di espansione:  $p_Q = 3 \text{ bar}$ .

La massa complessiva  $m_{\text{tot}}$  degli organi traslanti con moto alternativo è pari a 1,2 kg ed è uguale alla massa  $m_c$  delle parti del manovellismo dotate di moto circolare, ridotta al bottone di manovella. La biella è costruita in acciaio UNI EN ISO 683-2:2018-18 Ni Cr Mo 5; questo materiale ammette un carico unitario di rottura  $R_m = 900 \text{ N/mm}^2$ .

La sezione, costante, del fusto della biella è rappresentata in **Figura 2**.

Verificare la resistenza della biella.



misure in mm

Figura 2

#### SOLUZIONE

Suddividiamo la soluzione del problema nelle seguenti fasi:

1. determinazione dei parametri geometrici, cinematici e dinamici;
2. verifica a carico di punta del fusto della biella;
3. verifica a pressoflessione del fusto della biella in posizione di quadratura.

#### 1. Determinazione dei parametri geometrici, cinematici e dinamici

Calcolo della velocità angolare della manovella:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 1500 \text{ giri/min}}{60} \approx 157,08 \text{ rad/s}$$

Calcolo dell'area della sezione retta dello stantuffo:

$$A_{\text{st}} = \frac{\pi \cdot d_{\text{st}}^2}{4} = \frac{\pi \cdot (60 \text{ mm})^2}{4} \approx 2827,43 \text{ mm}^2$$

La forza massima  $F_{\max}$  dovuta alla pressione dei gas vale quindi:

$$F_{\max} = p_{\max} \cdot A_{\text{st}} = 4 \text{ N/mm}^2 \cdot 2827,43 \text{ mm}^2 \approx 11\,309,73 \text{ N}$$

dato che è:  $40 \text{ bar} = 4 \text{ N/mm}^2$

in quanto è:  $1 \text{ bar} = 0,1 \text{ N/mm}^2$

Calcolo dei momenti d'inerzia  $I_x$  e  $I_y$ :

$$I_x = \frac{1}{12} (15 \cdot 24^3 - 2 \cdot 3,5 \cdot 16^3) \text{ mm}^4 \approx 14\,890,67 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} (16 \cdot 8^3 + 2 \cdot 4 \cdot 15^3) \text{ mm}^4 \approx 2\,932,67 \text{ mm}^4$$

Calcolo del modulo di resistenza a flessione  $W_x$ :

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{14\,890,67 \text{ mm}^4}{12 \text{ mm}} \approx 1\,240,89 \text{ mm}^3$$

Calcolo dell'area della sezione per ipotesi costante del fusto della biella:

$$A_{\text{fusto}} = (15 \cdot 24 - 2 \cdot 3,5 \cdot 16) \text{ mm}^2 = 248 \text{ mm}^2$$

Calcolo dei raggi d'inerzia  $i_x$  e  $i_y$ :

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A_{\text{fusto}}}} = \sqrt{\frac{14\,890,67 \text{ mm}^4}{248 \text{ mm}^2}} \approx 7,75 \text{ mm}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A_{\text{fusto}}}} = \sqrt{\frac{2\,932,67 \text{ mm}^4}{248 \text{ mm}^2}} \approx 3,44 \text{ mm}$$

Calcolo dei rapporti di snellezza  $\lambda_x$  e  $\lambda_y$ :

$$\lambda_x = \frac{l_x}{i_x} = \frac{180 \text{ mm}}{7,75 \text{ mm}} \approx 23,23$$

$$\lambda_y = \frac{l_y}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 180 \text{ mm}}{3,44 \text{ mm}} \approx 36,63$$

Calcolo delle forze d'inerzia ai punti morti:

$$F_{\text{in (P.M.S.)}} = m_{\text{tot}} \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) = 1,2 \text{ kg} \cdot (157,08 \text{ rad/s})^2 \cdot 0,06 \text{ m} \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \approx 2\,368,72 \text{ N}$$

in quanto è:

$$\mu = \frac{l}{r} = \frac{180 \text{ mm}}{60 \text{ mm}} = 3$$

con:

$$r = \frac{c}{2} = \frac{120 \text{ mm}}{2} = 60 \text{ mm}$$

$$F_{\text{in (P.M.I.)}} = m_{\text{tot}} \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = 1,2 \text{ kg} \cdot (157,08 \text{ rad/s})^2 \cdot 0,06 \text{ m} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \approx 1\,184,36 \text{ N}$$

Calcolo della forza risultante di compressione esercitata sul piede di biella in corrispondenza del P.M.S.:

$$F_{\text{tot (P.M.S.)}} = F_{\max} - F_{\text{in (P.M.S.)}} = (11\,309,73 - 2\,368,72) \text{ N} \approx 8\,941,01 \text{ N}$$

## 2. Verifica a carico di punta del fusto della biella

– Asse di inflessione = asse x-x; quindi: asse neutro = asse y-y

Il rapporto di snellezza è  $\lambda_y = 36,63$ . Per eseguire la verifica a carico di punta mediante l'applicazione della formula di Eulero occorre disporre di un rapporto di snellezza maggiore di quello minimo  $\lambda_{\min}(\text{Eulero})$ , che per gli acciai speciali è superiore a 70. Dal momento che risulta:

$$\lambda_y < \lambda_{\min}(\text{Eulero})$$

non è possibile eseguire tale verifica tramite la formula di Eulero.

Eseguiamo perciò la verifica a carico di punta con la formula di Rankine. L'espressione che utilizziamo è quindi la seguente:

$$\sigma = \frac{F_{\text{ass}}}{A_{\text{fusto}}} \leq \sigma_{\text{adm (Rankine)}} = \frac{\sigma_{\text{adm compr.}}}{1 + \alpha \cdot \lambda_y^2}$$

Risulta:

$$\sigma = \frac{F_{\text{tot (P.M.S.)}}}{A_{\text{fusto}}} = \frac{8941,01 \text{ N}}{248 \text{ mm}^2} \approx 36,05 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{\text{adm compr.}} = \frac{R_m}{k_R} = \frac{900 \text{ N/mm}^2}{10} = 90 \text{ N/mm}^2$$

(con:  $k_R = 10$ )

$$\sigma_{\text{adm (Rankine)}} = \frac{90 \text{ N/mm}^2}{1 + 0,00018 \cdot 36,63^2} \approx 72,49 \text{ N/mm}^2$$

(con:  $\alpha = 0,00018$ ).

Dal momento che risulta:

$$\sigma = 36,05 \text{ N/mm}^2 < 72,49 \text{ N/mm}^2 = \sigma_{\text{adm (Rankine)}}$$

la verifica a carico di punta realizzata con la formula di Rankine ha esito positivo. Se ne deduce che, a maggior ragione, la sezione è verificata anche a compressione semplice.

– Asse di inflessione = asse y-y; quindi: asse neutro = asse x-x

La verifica a carico di punta in questo caso è superflua, in quanto è  $\lambda_x < \lambda_y$ . Per completezza di trattazione viene comunque eseguita. Si ricava:

$$\sigma_{\text{adm (Rankine)}} = \frac{90 \text{ N/mm}^2}{1 + 0,00018 \cdot 23,23^2} \approx 82,03 \text{ N/mm}^2$$

Dato che risulta:

$$\sigma = 36,05 \text{ N/mm}^2 < 82,03 \text{ N/mm}^2 = \sigma_{\text{adm (Rankine)}}$$

anche questa verifica ha – come si è anticipato – esito positivo.

## 3. Verifica a pressoflessione del fusto della biella in posizione di quadratura

Dall'espressione:

$$\text{tg } \alpha = \frac{l}{r} = \mu$$

si ottiene:

$$\alpha = \text{arctg}(\mu) = \text{arctg } 3 \approx 71,57^\circ$$

Perciò è:

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 71,57^\circ \approx 18,43^\circ$$

In corrispondenza della posizione di quadratura, durante la fase di espansione, la spinta sul pistone vale:

$$F_{\text{tot Q}} = F_Q = p_Q \cdot A_{\text{st}} = 0,3 \text{ N/mm}^2 \cdot 2827,43 \text{ mm}^2 \approx 848,23 \text{ N}$$

in quanto è:

$$p_Q = 3 \text{ bar} = 0,3 \text{ N/mm}^2$$

Dunque, la forza che sollecita a compressione assiale la biella in questa configurazione vale:

$$F'_Q = \frac{F_{\text{tot Q}}}{\cos \beta} = \frac{F_Q}{\cos \beta} = \frac{848,23 \text{ N}}{\cos 18,43^\circ} \approx 894,1 \text{ N}$$

poiché sono nulle le forze d'inerzia alternative.

Dalla relazione:

$$M_{f \max} = 0,064 \cdot m_c \cdot \omega^2 \cdot r \cdot l$$

si ottiene:

$$M_{f \max} = 0,064 \cdot 1,2 \text{ kg} \cdot (157,08 \text{ rad/s})^2 \cdot 0,06 \text{ m} \cdot 0,18 \text{ m} \approx 20,466 \text{ Nm} = 20466 \text{ Nmm}$$

Applichiamo l'equazione di stabilità a pressoflessione, che nel nostro caso diventa:

$$\sigma_{\max} = \frac{F'_Q}{A_{\text{fusto}}} + \frac{M_{f \max}}{W_x} \leq \sigma_{\text{adm compr.}}$$

Si ricava:

$$\sigma_{\max} = \frac{894,1 \text{ N}}{248 \text{ mm}^2} + \frac{20466 \text{ Nmm}}{1240,89 \text{ mm}^3} \approx 20,1 \text{ N/mm}^2$$

Dato che si è ottenuto:

$$\sigma_{\max} = 20,1 \text{ N/mm}^2 < 90 \text{ N/mm}^2 = \sigma_{\text{adm compr.}}$$

la verifica a pressoflessione ha esito positivo.

### A6 Esercizio 3

La biella di un motore alternativo a c.i. a uso navale ha sezione circolare cava i cui diametri esterno e interno, valutati sulla sezione media del fusto, valgono rispettivamente:  $D = 10 \text{ cm}$  e  $d = 6 \text{ cm}$ . La lunghezza della biella è pari a  $1,2 \text{ m}$ . Il materiale utilizzato è l'acciaio UNI EN ISO 683-2:2018-25 Cr Mo 4, che ammette un carico unitario di rottura  $R_m = 800 \text{ N/mm}^2$ . Determinare la spinta massima che la biella può sopportare in senso assiale in sicurezza.

### SOLUZIONE

Innanzitutto occorre conoscere il rapporto di snellezza  $\left( \lambda = \frac{l_1}{i_{\min}} \right)$  della biella, allo scopo di valutare l'opportunità di calcolare la spinta assiale massima in relazione all'eventuale pericolo di inflessione laterale. Il raggio d'inerzia  $i$ , dato che si tratta di una struttura avente sezione circolare cava, resta immutato per qualunque piano di inflessione. Si ha cioè:  $i_x = i_y = i = \text{cost.}$

con:

$$i = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{D^2 + d^2}$$



Nel nostro caso è:

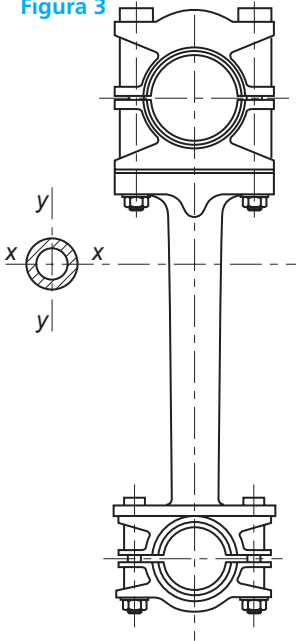
$$i = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{10^2 + 6^2} \text{ cm} = 2,92 \text{ cm}$$

I rapporti di snellezza:

$$\lambda_x = \frac{l_x}{i} \quad \text{e} \quad \lambda_y = \frac{l_y}{i}$$

variano perciò unicamente in funzione della lunghezza libera d'inflessione. Nel nostro caso si possono presentare due eventualità (Figura 3):

Figura 3



1. se la biella si inflette sul piano del disegno, cioè sul piano di traccia y-y, è:

$$l_x = l$$

in quanto i vincoli alle sue estremità si comportano normalmente come due cerniere;

2. se la biella si inflette sul piano perpendicolare a quello del disegno, cioè sul piano di traccia x-x, è:

$$l_x = 0,7 l$$

in quanto i vincoli alle sue estremità si comportano come due incastrati.

Evidentemente risulta:

$$l_x > l_y$$

Si può concludere che la biella può inflettersi più facilmente nel piano di traccia y-y che non in quello di traccia x-x.

Per questo motivo il calcolo viene limitato alla sola inflessione sul piano di traccia y-y. Abbiamo perciò:

$$\lambda_x = \frac{l_x}{i} = \frac{120 \text{ cm}}{2,92 \text{ cm}} \approx 41,1$$

Il rapporto di snellezza calcolato ci conferma che la struttura in questione è da considerarsi snella; pertanto proseguiamo lo studio con l'utilizzazione dei noti procedimenti di verifica a carico di punta.

Non è possibile adottare il metodo di Eulero in quanto è:  $\lambda_x < \lambda_{\min(\text{Eulero})}$ ; infatti  $\lambda_{\min(\text{Eulero})}$  relativo agli acciai legati è superiore a 70. Adottiamo allora il metodo di Rankine, dal quale ricaviamo l'espressione:

$$\sigma = \frac{F_{\text{ass}}}{A} \leq \sigma_{\text{adm (Rankine)}} = \frac{\sigma_{\text{adm compr.}}}{1 + \alpha \cdot \lambda^2}$$

Da tale relazione si ottiene:

$$F_{\text{ass max}} = \sigma_{\text{adm (Rankine)}} \cdot A = \frac{\sigma_{\text{adm compr.}} \cdot A}{1 + \alpha \cdot \lambda^2}$$

L'area  $A_{\text{fusto}}$  della sezione media del fusto della biella vale:

$$A_{\text{fusto}} = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4} (100^2 - 60^2) \text{ mm}^2 \approx 5026,55 \text{ mm}^2$$

Se si utilizza un coefficiente di sicurezza relativo alla rottura  $k_R$  pari a 10, la tensione ammissibile a compressione per l'acciaio indicato dal testo del problema è:

$$\sigma_{\text{adm compr.}} = \frac{R_m}{k_R} = \frac{800 \text{ N/mm}^2}{10} = 80 \text{ N/mm}^2$$

Di conseguenza la forza assiale massima che la biella può sopportare in sicurezza è:

$$F_{\text{ass max}} = \frac{\sigma_{\text{adm compr}} \cdot A_{\text{fusto}}}{1 + \alpha \cdot \lambda_x^2} = \frac{80 \text{ N/mm}^2 \cdot 5026,55 \text{ mm}^2}{1 + 0,00018 \cdot 41,1^2} \approx 308\,363 \text{ N} \approx 308,36 \text{ kN}$$

in quanto si è assunto:

$$\alpha = 0,00018$$

#### A7 Esercizio 4

Progettare la biella di un motore idraulico alternativo in base ai seguenti dati: il fusto ha sezione circolare piena costante; la pressione massima sullo stantuffo vale 2,5 bar; l'alesaggio, cioè il diametro della sezione retta del cilindro, è  $D = 20 \text{ cm}$ ; la lunghezza della biella è 1 metro.

Il materiale è un acciaio che ammette un modulo di Young:  $E = 205\,000 \text{ N/mm}^2$ .

#### SOLUZIONE

La spinta massima  $F_{\text{max}}$  che si esercita sullo stantuffo per effetto della pressione del fluido vale:

$$F_{\text{max}} = p_{\text{max}} \cdot A_{\text{st}} = 0,25 \text{ N/mm}^2 \cdot 31\,416 \text{ mm}^2 \approx 7854 \text{ N}$$

dove l'area  $A_{\text{st}}$  della sezione retta dello stantuffo è:

$$A_{\text{st}} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = \frac{\pi \cdot (20 \text{ cm})^2}{4} \approx 314,16 \text{ cm}^2 = 31\,416 \text{ mm}^2$$

e, dato che è:  $1 \text{ bar} = 0,1 \text{ N/mm}^2$ , quindi:

$$2,5 \text{ bar} = 0,25 \text{ N/mm}^2$$

Dimensioniamo la biella a carico di punta. Dalla formula di Eulero, nell'ipotesi di una sua possibile applicazione a questo caso, si ha:

$$P_{\text{adm (Eulero)}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\text{min}}}{k_{\text{(Eulero)}} \cdot l_1^2}$$

Da questa relazione si può ricavare l'espressione:

$$I_{\text{min}} = \frac{P_{\text{adm (Eulero)}} \cdot k_{\text{(Eulero)}} \cdot l_1^2}{\pi^2 \cdot E}$$

Se si assume:  $k_{\text{(Eulero)}} = 5$  e:  $l_1 = l = 1000 \text{ mm}$  si ottiene:

$$I_{\text{min}} = \frac{7854 \text{ N} \cdot 5 \cdot (1000 \text{ mm})^2}{\pi^2 \cdot 205\,000 \text{ N/mm}^2} \approx 19\,409,2 \text{ mm}^4$$

dato che si è posto:

$$P_{\text{adm (Eulero)}} = F_{\text{max}}$$

in quanto si sono trascurate, a tutto vantaggio della sicurezza, le forze d'inerzia alternative. Per le sezioni circolari piene, vale la seguente formula:

$$I = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$$

da cui si ricava:

$$d = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot I}{\pi}}$$

Risulta:

$$d_{\text{min fusto}} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 19\,409,2 \text{ mm}^4}{\pi}} \approx 25,08 \text{ mm}$$

valore che arrotondiamo a 26 mm.

Verifichiamo ora la correttezza del procedimento con la determinazione del rapporto di snellezza  $\lambda_x$ ; si ha:

$$\lambda_x = \frac{l_x}{i} = \frac{1000 \text{ mm}}{6,5 \text{ mm}} \approx 153,85$$

in quanto, per una sezione circolare piena, è:

$$i = \frac{R_{\text{fusto}}}{2} = \frac{d_{\text{fusto}}}{4} = \frac{26 \text{ mm}}{4} = 6,5 \text{ mm}$$

Dal momento che risulta:

$$\lambda_x = 153,85 > \lambda_{\text{min (Eulero)}}$$

in quanto  $\lambda_{\text{min (Eulero)}}$  per gli acciai comuni varia da 75 a 100, si ha la conferma che l'applicazione della formula di Eulero al nostro caso è corretta.