

## 7.4

## Bilanciamento delle forze d'inerzia alternative

Rappresentiamo schematicamente gli alberi a gomiti mediante due viste: laterale e frontale. Nella vista frontale poniamo la manovella del primo pistone in posizione di P.M.S.

## Motore a due cilindri in linea, a quattro tempi (Figura 1)

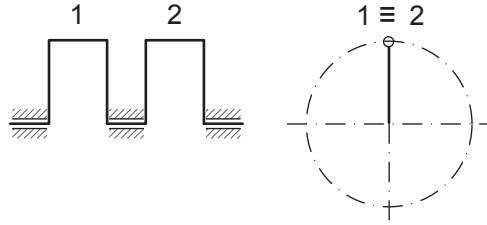


Figura 1

Albero a gomiti del motore a due cilindri in linea, a quattro tempi (schema).

## Forze d'inerzia alternative del 1° ordine

Le forze d'inerzia alternative del 1° ordine non sono equilibrate in quanto la loro risultante è diversa da zero. Infatti esse valgono:

– per la prima manovella:

$$F'_{in I} = m_{in} \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \cos \alpha$$

– per la seconda manovella:

$$F'_{in II} = m_{in} \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \cos(\alpha + 2 \cdot \pi) = m_{in} \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \cos \alpha = F'_{in I}$$

in quanto in questo caso l'angolo di sfasamento  $\vartheta$  vale:

$$\vartheta = \frac{\tau_{tempi} \cdot \pi}{z_{cil}} = \frac{4 \cdot \pi}{2} = 2 \cdot \pi \text{ [rad]} = 360^\circ$$

dal momento che è:  $\tau_{tempi} = 4$  e:  $z_{cil} = 2$

Risulta perciò:

$$\sum F_{in} = F'_{in I} + F'_{in II} = 2 \cdot F'_{in I} = 2 \cdot m_{in} \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \cos \alpha \neq 0$$

Le forze d'inerzia alternative del 1° ordine, quindi, ammettono una risultante diversa da zero. Esse inoltre, dato che sono parallele e concordi, non formano coppia; dunque è:

$$\sum M'_{in} = 0$$

## Forze d'inerzia alternative del 2° ordine

Le forze d'inerzia alternative del 2° ordine non sono equilibrate in quanto la loro risultante è diversa da zero. Infatti esse valgono:

– per la prima manovella:

$$F''_{in I} = m_{in} \cdot \frac{\omega^2 \cdot r}{\mu} \cdot \cos(2 \cdot \alpha)$$

– per la seconda manovella:

$$F''_{in II} = m_{in} \cdot \frac{\omega^2 \cdot r}{\mu} \cdot \cos[2 \cdot (\alpha + 2 \cdot \pi)] = m_{in} \cdot \frac{\omega^2 \cdot r}{\mu} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) = F''_{in I}$$

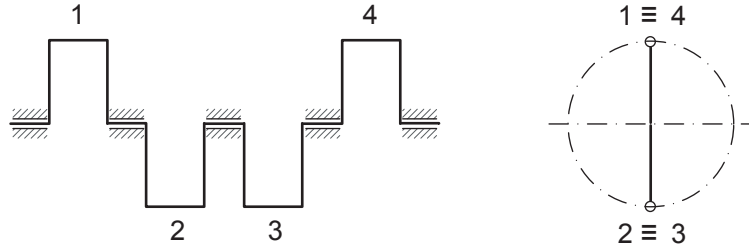
Risulta perciò:

$$\sum F''_{in} = F''_{in I} + F''_{in II} = 2 \cdot F''_{in I} = 2 \cdot m_{in} \cdot \frac{\omega^2 \cdot r}{\mu} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) \neq 0$$

Le forze d'inerzia alternative del 2° ordine, quindi, analogamente alle  $F'_{in}$ , ammettono una risultante non nulla. Esse inoltre, dato che sono parallele e concordi, non formano coppia; pertanto è:

$$\sum M''_{in} = 0$$

### Motore a quattro cilindri in linea, a quattro tempi (Figura 2)



**Figura 2**

Albero a gomiti del motore a quattro cilindri in linea, a quattro tempi (schema).

Il motore a quattro cilindri in linea a quattro tempi è equilibrato sia staticamente sia dinamicamente. Ne consegue che esso è bilanciato per quello che riguarda sia le forze d'inerzia alterne del 1° ordine, sia i relativi momenti.

Ciò può essere dimostrato anche mediante il seguente calcolo analitico.

#### Forze d'inerzia alternative del 1° ordine e relativi momenti

Per quanto riguarda le forze d'inerzia alternative del 1° ordine risulta:

– per la manovella 1:

$$F'_{in I} = m_{in} \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \cos \alpha$$

– per la manovella 2:

$$F'_{in II} = m_{in} \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \cos(\alpha + 180^\circ) = -m_{in} \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \cos \alpha$$

dato che l'angolo di sfasamento  $\vartheta$  in questo caso vale  $180^\circ$ , in quanto è:

$$\vartheta = \frac{\tau_{tempi} \cdot \pi}{z_{cil}} = \frac{4 \cdot \pi}{4} = \pi \text{ [rad]} = 180^\circ$$

con:

$$\tau_{tempi} = 4$$

$$z_{cil} = 4$$

– per la manovella 3:

$$F'_{in III} = -m_{in} \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \cos \alpha = F'_{in II}$$

in quanto la manovella 3 è in fase con la manovella 2;

– per la manovella 4:

$$F'_{in IV} = m_{in} \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \cos \alpha = F'_{in I}$$

in quanto la manovella 4 è in fase con la manovella 1.

La risultante delle forze alterne del 1° ordine vale perciò:

$$\Sigma F'_{in} = F'_{in I} + F'_{in II} + F'_{in III} + F'_{in IV} = 0$$

Per quanto riguarda i momenti delle forze d'inerzia alternative del 1° ordine, essi hanno risultante nulla: infatti il momento prodotto dalla coppia formata dalle forze  $F'_{in I}$  e  $F'_{in II}$  è uguale e di verso opposto a quello formato dalle forze  $F'_{in III}$  e  $F'_{in IV}$ .

### Forze d'inerzia alternative del 2° ordine e relativi momenti

Per quanto riguarda le forze d'inerzia alternative del 2° ordine, esse non sono equilibrate, in quanto la loro risultante è diversa da zero. Quest'ultima può essere calcolata analiticamente.

Risulta:

– per la manovella 1:

$$F''_{in I} = m_{in} \cdot \frac{\omega^2 \cdot r}{\mu} \cdot \cos(2 \cdot \alpha)$$

– per la manovella 2:

$$\begin{aligned} F'_{in II} &= m_{in} \cdot \frac{\omega^2 \cdot r}{\mu} \cdot \cos[2 \cdot (\alpha + 180^\circ)] = m_{in} \cdot \frac{\omega^2 \cdot r}{\mu} \cdot \cos(2 \cdot \alpha + 360^\circ) = \\ &= m_{in} \cdot \frac{\omega^2 \cdot r}{\mu} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) = F''_{in I} \end{aligned}$$

dato che l'angolo di sfasamento  $\vartheta$  in questo caso vale  $180^\circ$ , in quanto è:

$$\vartheta = \frac{\tau_{tempi} \cdot \pi}{z_{cil}} = \frac{4 \cdot \pi}{4} = \pi \text{ [rad]} = 180^\circ$$

con:  $\tau_{tempi} = 4$  e:  $z_{cil} = 4$

– per la manovella 3:

$$F''_{in III} = m_{in} \cdot \frac{\omega^2 \cdot r}{\mu} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) = F''_{in II}$$

in quanto questa manovella è in fase con la manovella 2;

– per la manovella 4:

$$F''_{in IV} = m_{in} \cdot \frac{\omega^2 \cdot r}{\mu} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) = F''_{in I}$$

in quanto questa manovella è in fase con la manovella 1.

La risultante delle forze d'inerzia alterne del 2° ordine vale perciò:

$$\Sigma F''_{in} = F''_{in I} + F''_{in II} + F''_{in III} + F''_{in IV} = 4 \cdot F''_{in I} = 4 \cdot m_{in} \cdot \frac{\omega^2 \cdot r}{\mu} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) \neq 0$$

Dunque, le forze d'inerzia alterne del 2° ordine non sono equilibrate in quanto ammettono risultante non nulla. Esse, inoltre, sono parallele e concordi, perciò non formano coppia. È quindi:

$$\Sigma M''_{in} = 0$$

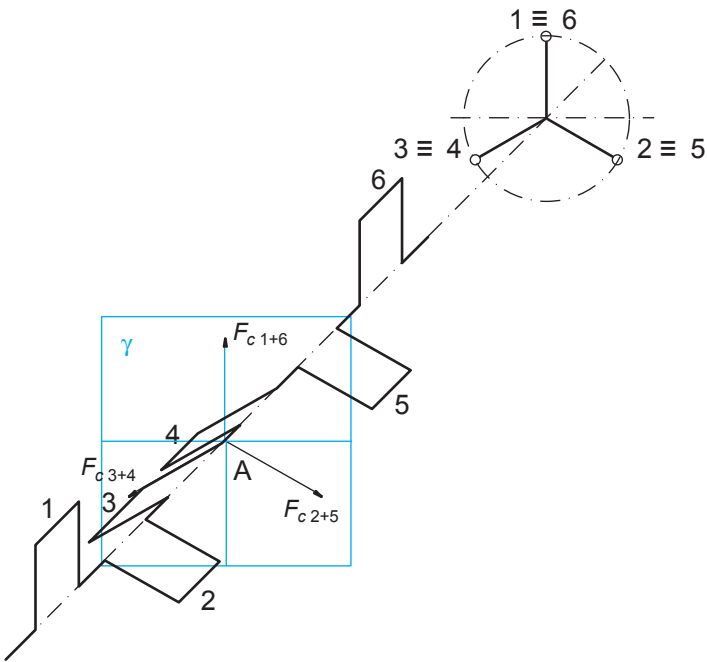
Motore a sei cilindri in linea, a quattro tempi

L'angolo di sfasamento, per questo tipo di motore, è:

$$\vartheta = \frac{4 \cdot \pi}{6} = \frac{2}{3} \cdot \pi \text{ [rad]} = 120^\circ$$

dato che è:  $\tau_{\text{tempi}} = 4$  e:  $z_{\text{cil}} = 6$

L'albero a gomiti assume allora la forma schematizzata nella **Figura 3**; esso risulta equilibrato sia staticamente sia dinamicamente.



**Figura 3**  
Albero a gomiti del motore a sei cilindri in linea, a quattro tempi (schema).

1. Verifica dell'equilibramento statico

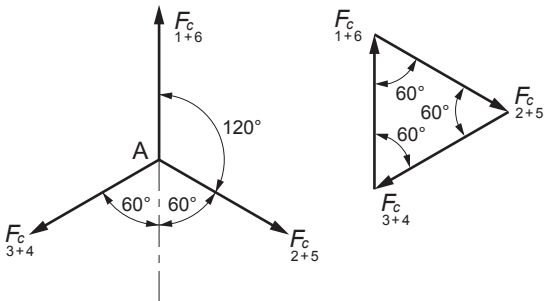
Indichiamo con:

$F_{c1}, F_{c2}, F_{c3}, F_{c4}, F_{c5}, F_{c6}$  le forze centrifughe generate dalle masse rotanti rispettivamente delle manovelle 1, 2, 3, 4, 5, 6.

La somma vettoriale delle forze  $F_{c1}, F_{c2}, F_{c3}$  è uguale a zero, ovvero risulta:

$$F_{c1} + F_{c2} + F_{c3} = 0$$

Infatti queste tre forze sono uguali tra di loro e sfasate di  $120^\circ$ ; pertanto il poligono dei vettori da esse formato è chiuso. Esse costituiscono perciò un sistema equilibrato (**Figura 4**).



**Figura 4**  
Composizione delle forze centrifughe e relativo poligono delle forze chiuso (= risultante nulla).

In base a queste stesse considerazioni possiamo affermare che anche le forze  $F_{c4}, F_{c5}, F_{c6}$  hanno risultante nulla, ovvero è:

$$F_{c4} + F_{c5} + F_{c6} = 0$$

Dunque, dato che risulta:

$$\Sigma F_c = 0$$

l'albero è già di per sé equilibrato staticamente.

## 2. Verifica dell'equilibramento dinamico

- a) L'albero è già di per sé equilibrato dinamicamente, dato che rispetta la seguente regola pratica:
  - è già di per sé equilibrato staticamente;
  - ammette un piano di simmetria (piano  $\gamma$ ) perpendicolare all'asse nella sezione A di mezzeria (Figura 3 già citata).
- b) Possiamo dimostrare che è equilibrato dinamicamente anche in base alle considerazioni qui di seguito esposte.

Indichiamo con:

$F_{c(2+3)}$  la risultante delle forze  $F_{c2}$  e  $F_{c3}$ ;

$F_{c(5+6)}$  la risultante delle forze  $F_{c5}$  e  $F_{c6}$ .

Per quanto detto prima, è:

$$F_{c1} = F_{c(2+3)}$$

Queste due forze sono perciò rappresentate da due vettori uguali, paralleli e discordi. Dato che non hanno la stessa retta d'azione, formano coppia. Analogamente, anche le forze  $F_{c4}$  e  $F_{c(5+6)}$ , rappresentate da due vettori uguali, paralleli e discordi e che non hanno la stessa retta d'azione, formano coppia.

Queste due coppie, come si può facilmente verificare, hanno momenti tra di loro uguali e opposti. Dunque, il momento risultante delle forze centrifughe è nullo; risulta cioè:

$$\Sigma M_c = 0$$

Quindi, l'albero è già di per sé equilibrato dinamicamente.

Per l'analogia tra le forze centrifughe e le forze d'inerzia alternative del 1° ordine, risulta anche:

$$\Sigma F'_{in} = 0$$

e

$$\Sigma M'_{in} = 0$$

Per quanto riguarda le forze d'inerzia alternative del 2° ordine, esse valgono:

– per le manovelle 1 e 6, in fase tra di loro:

$$F''_{in I} + F''_{in VI} = 2 \cdot m_{in} \cdot \frac{\omega^2 \cdot r}{\mu} \cdot \cos(2 \cdot \alpha)$$

– per le manovelle 2 e 5, in fase tra di loro:

$$\begin{aligned} F''_{in II} + F''_{in V} &= 2 \cdot m_{in} \cdot \frac{\omega^2 \cdot r}{\mu} \cdot \cos \left[ 2 \cdot \left( \alpha + \frac{2}{3} \cdot \pi \right) \right] = \\ &= 2 \cdot m_{in} \cdot \frac{\omega^2 \cdot r}{\mu} \cdot \cos \left[ 2 \cdot \alpha + \frac{4}{3} \cdot \pi \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \cdot m_{\text{in}} \cdot \frac{\omega^2 \cdot r}{\mu} \cdot \left[ \cos(2 \cdot \alpha) \cdot \cos\left(\frac{4}{3} \cdot \pi\right) - \sin(2 \cdot \alpha) \cdot \sin\left(\frac{4}{3} \cdot \pi\right) \right] = \\
&= 2 \cdot m_{\text{in}} \cdot \frac{\omega^2 \cdot r}{\mu} \cdot \left[ -\frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) \right]
\end{aligned}$$

in quanto la formula trigonometrica della somma di due generici angoli  $\alpha$  e  $\beta$ , relativa al coseno è:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

– per le manovelle 3 e 4, in fase tra di loro:

$$\begin{aligned}
F''_{\text{in III}} + F''_{\text{in IV}} &= 2 \cdot m_{\text{in}} \cdot \frac{\omega^2 \cdot r}{\mu} \cdot \cos\left[2 \cdot \left(\alpha + \frac{4}{3} \cdot \pi\right)\right] = \\
&= 2 \cdot m_{\text{in}} \cdot \frac{\omega^2 \cdot r}{\mu} \cdot \cos\left[\left(2 \cdot \alpha + \frac{8}{3} \cdot \pi\right)\right] = \\
&= 2 \cdot m_{\text{in}} \cdot \frac{\omega^2 \cdot r}{\mu} \cdot \left[ \cos(2 \cdot \alpha) \cdot \cos\left(\frac{2}{3} \cdot \pi\right) - \sin(2 \cdot \alpha) \cdot \sin\left(\frac{2}{3} \cdot \pi\right) \right] = \\
&= 2 \cdot m_{\text{in}} \cdot \frac{\omega^2 \cdot r}{\mu} \cdot \left[ -\frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) \right]
\end{aligned}$$

in quanto la formula trigonometrica della somma di due generici angoli  $\alpha$  e  $\beta$ , relativa al coseno è:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

In definitiva è:

$$\Sigma F''_{\text{in}} = (F''_{\text{in I}} + F''_{\text{in VI}}) + (F''_{\text{in II}} + F''_{\text{in V}}) + (F''_{\text{in III}} + F''_{\text{in IV}}) = 0$$

Dunque le forze d'inerzia alternative del 2° ordine ammettono risultante nulla; dato che sono simmetriche rispetto al piano che passa per A e che è ortogonale all'asse di rotazione dell'albero, anche il loro momento risultante è nullo, ovvero si ha:

$$\Sigma M''_{\text{in}} = 0$$

In conclusione, il motore a sei cilindri in linea risulta perfettamente equilibrato sia alle forze centrifughe e ai loro momenti, sia alle forze d'inerzia alternative e ai loro momenti.