

UDA 13

Meccanismi unidirezionali e freni

Prerequisiti

- Conoscenza delle grandezze fondamentali e derivate e delle relative unità di misura nel S.I.
- Conoscenza delle sollecitazioni semplici e delle sollecitazioni composte.
- Conoscenza dei principi fondamentali della cinematica e della dinamica dei moti rotatori.
- Conoscenza delle resistenze passive.
- Conoscenza delle principali nozioni di trigonometria e dei metodi di risoluzione per via trigonometrica dei triangoli rettangoli.
- Conoscenza delle condizioni di equilibrio dei corpi vincolati.

13.1 Generalità

• I **meccanismi unidirezionali** consentono la rotazione relativa tra due organi in un solo verso. Sono meccanismi unidirezionali i *meccanismi di arresto*; un particolare meccanismo unidirezionale è l'*innesto unidirezionale (ruota libera o innesto di sopravanzo)*.

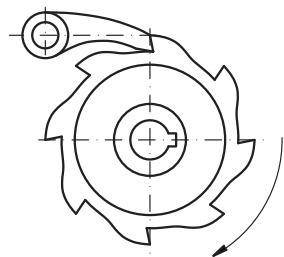
• I **freni** sono meccanismi in grado di rallentare o arrestare organi in moto; nel compiere questa funzione, essi trasformano in lavoro d'attrito l'energia cinetica di rotazione di cui è dotato l'organo meccanico che deve essere frenato.

13.2 I meccanismi di arresto

I *meccanismi di arresto* sono largamente usati negli apparecchi di sollevamento, nei quali impediscono la ricaduta del carico sollevato, ma trovano applicazione anche in altri settori come, ad esempio, l'orologeria.

In base al loro funzionamento i meccanismi di arresto si suddividono in:

1. *meccanismi di arresto a denti (arpionismi)*;
2. *meccanismi di arresto ad attrito (o a frizione)*.

**Figura 13.1**

Meccanismi di arresto:
arpionismo con nottolino.

13.2.1 Meccanismi di arresto a denti

I *meccanismi di arresto a denti (arpionismi)* sono molto diffusi; sono costituiti da:

- una ruota che presenta un profilo simile a quello di una dentatura a denti di sega;
- uno o più nottolini o arpioni.

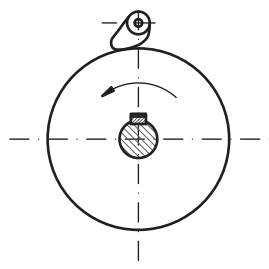
I nottolini o gli arpioni sono mantenuti a contatto con la ruota per effetto del peso proprio o dall'azione di una molla. Nell'arpionismo di **Figura 13.1**, la sola rotazione consentita è quella nel senso della freccia; il movimento in senso opposto è impedito dall'impuntamento del nottolino.

13.2.2 Meccanismi di arresto ad attrito

I *meccanismi di arresto ad attrito (o a frizione)* sono più silenziosi e con innesto più graduale di quelli a denti; il meccanismo rappresentato schematicamente in **Figura 13.2** è composto da:

- una ruota di frizione;
- una camma oscillante attorno a un perno fissato al telaio.

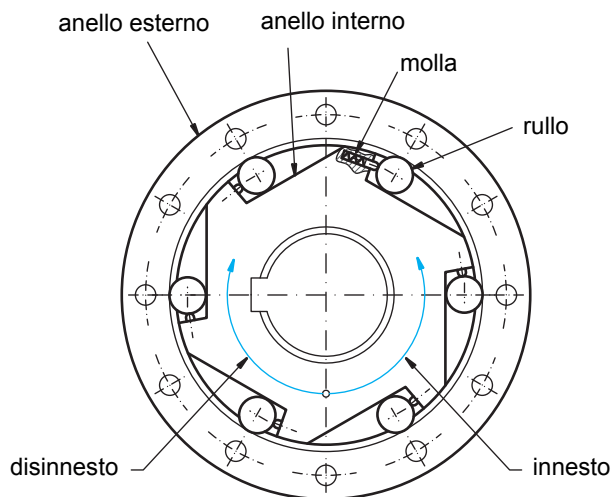
La rotazione della ruota può avvenire solo nel senso indicato in figura. Se la ruota è sollecitata a ruotare in senso opposto viene bloccata per effetto dell'attrito che si sviluppa tra essa e la camma, indotta dal suo profilo a impuntarsi contro la ruota stessa.

**Figura 13.2**

Meccanismo di arresto
ad attrito.

13.2.3 Innesto unidirezionale (ruota libera o innesto di sopravanzo)

La *ruota libera (o innesto di sopravanzo)* (**Figura 13.3**) è un *innesto unidirezionale* che in una trasmissione scollega l'albero motore dall'albero condotto quando l'albero condotto ruota più velocemente dell'albero motore.

**Figura 13.3**

Meccanismo di innesto
unidirezionale.

Composizione

Questo meccanismo è costituito da:

- due anelli: l'uno esterno, l'altro interno; l'anello interno presenta sul bordo esterno un profilo simile a una dentatura a denti di sega;
- un certo numero di rulli, tenuti compressi, nello spazio incluso tra i due anelli, da molle alloggiati nell'anello interno.

Funzionamento

Nella fase di innesto questo dispositivo trasmette il momento torcente in un solo senso mediante l'incuneamento dei rulli tra i due anelli.

Questo innesto unidirezionale, se applicato ad esempio in una bicicletta, consente la rotazione della ruota posteriore solo quando il pignone gira alla stessa velocità della ruota e nel senso dell'avanzamento della bicicletta; se il pignone ruota a velocità inferiore o nel senso opposto a quello di avanzamento della bicicletta, l'innesto non produce alcun movimento sulla ruota.

Applicazioni degli innesti unidirezionali

In campo elicotteristico:

- in caso di arresto del motore consentono di disaccoppiare il rotore dalla trasmissione, permettendo in questo modo la rotazione libera del rotore.

Nel settore ciclistico:

- consentono di disaccoppiare il pignone dalla ruota posteriore quando la velocità di rotazione del pignone è inferiore a quella della ruota.

Nel settore automotive:

- nei motori a c.i. dotati di avviamento elettrico, in fase di accensione del motore consentono di accoppiare il motorino di avviamento all'albero motore e di disaccoppiarlo a motore avviato.

Altre applicazioni degli innesti unidirezionali riguardano il loro impiego nella realizzazione dell'avanzamento intermittente dei prodotti in lavorazione:

- nell'industria meccanica, in alcune macchine utensili ad asportazione di truciolo come le tranciatrici e le punzonatrici;
- nell'industria alimentare, chimica ecc.

13.3 I freni ad attrito

Nei freni l'attrito è ottenuto mediante forze esercitate tra due superfici premute l'una contro l'altra: una superficie è fissa al telaio della macchina, l'altra fa parte dell'organo in moto relativo.

Allo scopo di accrescere il coefficiente d'attrito tra le superfici degli elementi frenanti che vengono a contatto reciproco, queste sono frequentemente rivestite di un particolare materiale (*materiale di frizione*).

Approfondimento

Materiali di frizione

Un *materiale di frizione* ideale da utilizzare in un freno ad attrito deve presentare le seguenti caratteristiche:

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| – elevato coefficiente di attrito; | – alta resilienza; |
| – resistenza alle alte temperature; | – alta resistenza all'usura; |
| – buona conducibilità termica; | – compatibilità con altri materiali. |

Per lungo tempo è stato utilizzato come materiale di frizione il *ferodo*, un tessuto di amianto molto resistente all'usura e alle variazioni di temperatura.

Da vari decenni, da quando cioè è divenuta evidente la nocività di questo materiale, le norme ne hanno vietato l'uso. Attualmente si utilizzano composti di materiali diversi, ognuno con funzioni specifiche: aramide, resina, ossido di alluminio, solfuri metallici, abrasivi, grafite, particelle in ceramica, rame ecc.

13.3.1 Dispositivi di comando dei freni

I dispositivi di comando tramite i quali si producono le forze che comprimono tra di loro le due superfici d'attrito variano a seconda del tipo di macchina sulla quale sono installati. Abbiamo così dispositivi di tipo *idraulico*, montati su autoveicoli e motoveicoli (Figura 13.4); dispositivi *pneumatici* e *idropneumatici* installati su grossi veicoli industriali e su alcuni mezzi ferroviari (Figura 13.5).



Figura 13.4
Impianto frenante di un autoveicolo (schema).

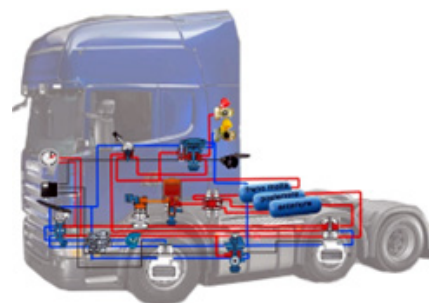


Figura 13.5
Impianto frenante di un grosso veicolo industriale (schema).

Il sistema di comando utilizzato sulle macchine utensili CNC e su molti veicoli ferroviari (Figura 13.6) è invece di tipo *elettrico*; i dispositivi di comando montati, ad esempio, sulle biciclette (Figura 13.7) sono *meccanici*.



Figura 13.6
Fresatrice CNC.



Figura 13.7
Impianto frenante per bicicletta.

13.3.2 Classificazione dei freni ad attrito

I *freni ad attrito* si distinguono in:

- **freni avvolgenti**, che comprendono:
 - freni a nastro;
 - freni a ceppi esterni;
- **freni a espansione (freni a ceppi interni o freni a tamburo)**, che possono essere:
 - freni a ceppi flottanti;
 - freni a ceppi infulcrati;
- **freni a disco.**

Gli organi frenanti dei *freni avvolgenti* sono costituiti da nastri o da ceppi agenti sulla superficie esterna di una puleggia; quelli dei *freni a espansione* sono ceppi (*ganasce*) che svolgono la loro azione frenante sulla superficie interna di un tamburo cavo.

I *freni a disco* sono caratterizzati da elementi frenanti costituiti da *pattini* piani (*pastiglie*) (Figura 13.8) che agiscono su entrambe le facce di un disco.

L'azione frenante mantiene la sua efficacia anche dopo un uso prolungato del freno solo se quest'ultimo non si surriscalda. Per evitare il pericolo del surriscaldamento occorre quindi dotare il freno di un adeguato sistema di smaltimento del calore prodotto per attrito.

Per quanto riguarda l'usura degli elementi frenanti, essa può essere limitata mediante un'opportuna riduzione del valore della pressione specifica con cui sono premute l'una contro l'altra le superfici d'attrito.



Figura 13.8
Pastiglia di freno a disco.

13.4 Il momento frenante

Indichiamo con:

$M_{fr.}$ il *momento frenante*, cioè il momento generato sull'organo rotante dalle resistenze d'attrito [$N \cdot m$];

M_m il momento motore agente sullo stesso organo [$N \cdot m$];

M_r il momento resistente [$N \cdot m$];

J il momento d'inerzia assiale [$kg \cdot m^2$];

e la decelerazione angolare prodotta dall'azione frenante di $M_{fr.}$ [rad/s^2].

Per definizione si ha:

$$\varepsilon = \frac{\omega_f - \omega_0}{t} \quad (1)$$

dove ω_f e ω_0 sono le velocità angolari rispettivamente di fine e di inizio dell'operazione di frenatura.

Dato che è $\omega_f < \omega_0$, ε risulta negativa: si tratta infatti di una decelerazione. Risulta inoltre:

$$M_m - M_r - M_{fr.} = J \cdot \varepsilon \quad (2)$$

o, in base alla (1):

$$M_m - M_r - M_{fr.} = J \cdot \frac{\omega_f - \omega_0}{t} \quad (3)$$

da cui si ricava:

$$M_{fr.} = M_m - M_r + J \cdot \frac{\omega_0 - \omega_f}{t} \quad (3')$$

Se l'operazione di frenatura termina con l'arresto delle masse rotanti, nella (3) si pone:

$$\omega_f = 0$$

Si ottiene:

$$M_{fr.} = M_m - M_r + \frac{J \cdot \omega_0}{t} \quad (4)$$

13.5 Freni avvolgenti

13.5.1 Freni a nastro

I *freni a nastro* sono composti essenzialmente da una puleggia sulla quale si avvolge un nastro d'acciaio. La puleggia, che è collegata al complesso degli organi da frenare, costituisce la parte rotante del freno; il nastro è l'elemento frenante. Su quest'ultimo è in genere applicata una guarnizione di ferodo.

In **Figura 13.9** è rappresentato il tipo più semplice di freno a nastro (*freno a nastro ordinario*): una delle estremità del nastro (punto A) è collegata in corrispondenza del fulcro posto all'estremità di una leva; l'altra estremità del nastro (punto B) è fissata a un punto intermedio della leva. Il nastro viene serrato sulla puleggia quando all'estremità C della leva viene applicata la forza F .

Per effetto dell'attrito tra nastro e puleggia, nei due rami del nastro non avvolti sulla puleggia si producono tensioni differenti.

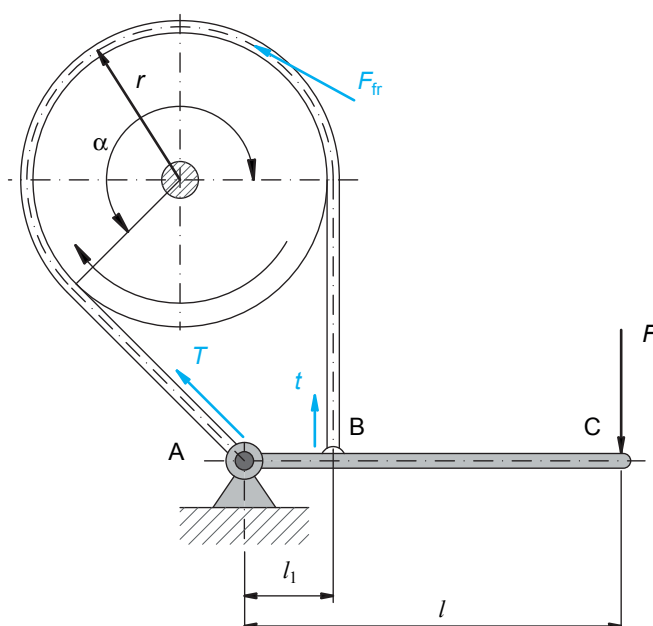


Figura 13.9
Freno a nastro ordinario
(schema).

Se la puleggia ruota nel senso indicato dalla figura sopracitata, la tensione maggiore T si ha sul ramo del nastro fissato al fulcro. Detta t la forza che viene esercitata sull'altro ramo, la relazione tra T e t è:

$$T = t \cdot e^{f \cdot \alpha} \quad (5)$$

dove:

e = numero di Nepero ($e \approx 2,71828$);

f = coefficiente d'attrito, che può variare da 0,3 a 0,5; scende a 0,2 ÷ 0,3 se vi è una leggera lubrificazione;

α = angolo di avvolgimento del nastro sulla puleggia (in radianti).

La forza F da applicare alla leva, noti il momento frenante $M_{fr.}$ da realizzare, il coefficiente d'attrito radente f , l'angolo di avvolgimento α tra nastro e puleggia e fissati il rapporto l_1/l e il raggio r della puleggia, è ricavabile dall'espressione:

$$F = \frac{M_{fr.}}{(e^{f \cdot \alpha} - 1) \cdot r} \cdot \frac{l_1}{l} \quad (6)$$

Le forze t e T che vengono esercitate sui rami del nastro non avvolti sulla puleggia sono espresse dalle relazioni:

– per il ramo meno teso:

$$t = \frac{M_{fr.}}{(e^{f \cdot \alpha} - 1) \cdot r} \quad (7)$$

– per il ramo più teso:

$$T = \frac{M_{fr.} \cdot e^{f \cdot \alpha}}{(e^{f \cdot \alpha} - 1) \cdot r} \quad (8)$$

Per quanto riguarda il nastro, esso è soggetto alla sollecitazione di trazione; la verifica della resistenza a trazione richiede il rispetto della condizione:

$$\sigma = \frac{T}{S_{res}} \leq \sigma_{adm} \quad (9)$$

dove S_{res} rappresenta la sezione resistente del nastro stesso.

Se si indicano con b e s rispettivamente la larghezza e lo spessore del nastro e con z il numero di chiodi o bulloni di diametro d , disposti su ogni fila, che si rendono necessari per fissare ciascuna estremità del nastro al relativo attacco (Figura 13.10), è:

$$S_{res} = b \cdot s - z \cdot d \cdot s = s \cdot (b - z \cdot d) \quad (10)$$

Se si sostituisce l'espressione (10) nella (9) si ottiene:

$$\sigma = \frac{T}{s \cdot (b - z \cdot d)} \leq \sigma_{adm} \quad (11)$$

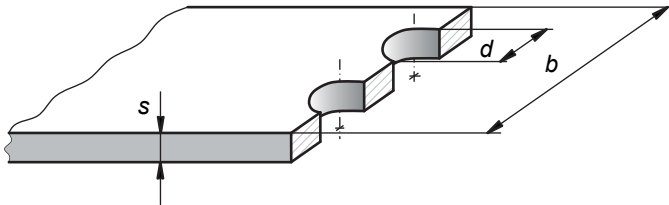


Figura 13.10

Nastro sezionato in corrispondenza dei fori per i chiodi o i bulloni.

L'acciaio di cui è costituito il nastro ammette un carico unitario di rottura generalmente superiore a 600 N/mm². Se si adotta un coefficiente di sicurezza alla rottura abbastanza elevato ($k_R = 10 \div 15$) per tener conto di eventuali urti nell'applicazione dei carichi, la tensione ammissibile σ_{adm} assume valori compresi tra 40 e 60 N/mm².

I freni a nastro sono convenienti per un solo verso di rotazione della puleggia: è il verso per cui il ramo più teso del nastro risulta essere quello collegato al fulcro della leva di comando (Figura 13.9 già citata).

In Figura 13.11 è rappresentato un *freno a nastro differenziale* nel quale la forza T applicata all'estremità sinistra della leva produce rispetto al fulcro un momento di senso opposto a quello prodotto dalla forza t .

Caratteristica principale di questo freno è che nessuno dei due rami del nastro è collegato al fulcro della leva di comando.

Si può dimostrare che la forza F da applicare alla leva di un freno a nastro differenziale, noto il valore del momento frenante da realizzare $M_{fr.}$ e fissati i valori di l , l_1 , l_2 e f , è ricavabile dall'espressione:

$$F = \frac{M_{fr.}}{(e^{f \cdot \alpha} - 1) \cdot r \cdot l} \cdot (l_1 - e^{f \cdot \alpha} \cdot l_2) \quad (12)$$



Dimostrazione delle formule:

$$F = \frac{M_{fr.}}{(e^{f \cdot \alpha} - 1) \cdot r} \cdot \frac{l_1}{l};$$

$$t = \frac{M_{fr.}}{(e^{f \cdot \alpha} - 1) \cdot r};$$

$$T = \frac{M_{fr.} \cdot e^{f \cdot \alpha}}{(e^{f \cdot \alpha} - 1) \cdot r}$$

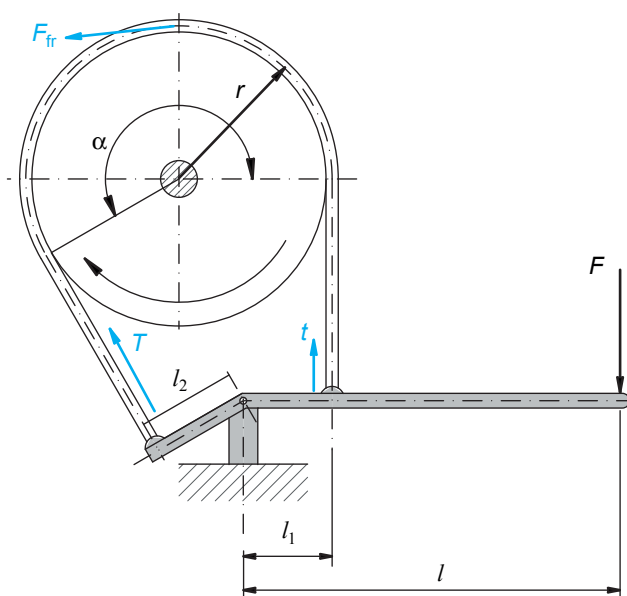


Dimostrazione della formula:

$$F = \frac{M_{fr.}}{(e^{f \cdot \alpha} - 1) \cdot r \cdot l} \cdot (l_1 - e^{f \cdot \alpha} \cdot l_2)$$

Figura 13.11

Freno a nastro differenziale (schema).



Freni a nastro di questo tipo sono utilizzabili in modo vantaggioso solo se la puleggia ha un solo senso di rotazione: nel caso preso in esame, il senso orario. Infatti se si inverte il senso di rotazione, ovvero nel nostro caso: se il senso di rotazione diventa quello antiorario, anche le tensioni sui due rami del nastro si invertono. Perciò, in questo caso per ottenere lo stesso momento frenante occorre applicare alla leva di comando una forza F_1 maggiore di F .

Impieghi

I freni a nastro sono impiegati su alcuni macchinari come supporto ad altri sistemi di frenatura; come freni principali vengono montati su vari tipi di paranchi, seghe elettriche, trasmissioni e biciclette. Sono comunemente impiegati sui trattori; è sconsigliabile il loro utilizzo a velocità elevate o se operano in ambienti umidi.

Caratteristiche

Presentano le seguenti proprietà:

- grande economicità;
- semplicità applicativa;
- notevole efficacia frenante.

Il nastro, in questi freni, è generalmente provvisto di una guarnizione in ferodo con leggera lubrificazione. Il coefficiente d'attrito è compreso tra 0,2 e 0,3.

13.5.2 Freni a ceppi esterni

I *freni a ceppi esterni* sono freni di tipo avvolgente come quelli a nastro; vengono utilizzati in genere sulle ruote delle carrozze ferroviarie, nelle quali i ceppi agiscono direttamente sui cerchioni, e in apparecchi di sollevamento. Solitamente si impiegano freni a due ceppi incernierati sulle rispettive leve di comando (**Figura 13.12**).

Si può dimostrare che la forza F di serraggio di un freno a ceppi esterni, noto il momento frenante M_{fr} , da realizzare e fissati i valori del diametro d della puleggia, di l , l_1 , l_2 e f , è ottenibile tramite l'espressione:

$$F = \frac{2 \cdot M_{fr} \cdot (l_1 - f \cdot l_2)}{d \cdot \left(1 + \frac{l_1 - f \cdot l_2}{l_1 + f \cdot l_2} \right) \cdot l \cdot f} \quad (13)$$



Dimostrazione della formula:

$$F = \frac{2 \cdot M_{fr} \cdot (l_1 - f \cdot l_2)}{d \cdot \left(1 + \frac{l_1 - f \cdot l_2}{l_1 + f \cdot l_2} \right) \cdot l \cdot f}$$

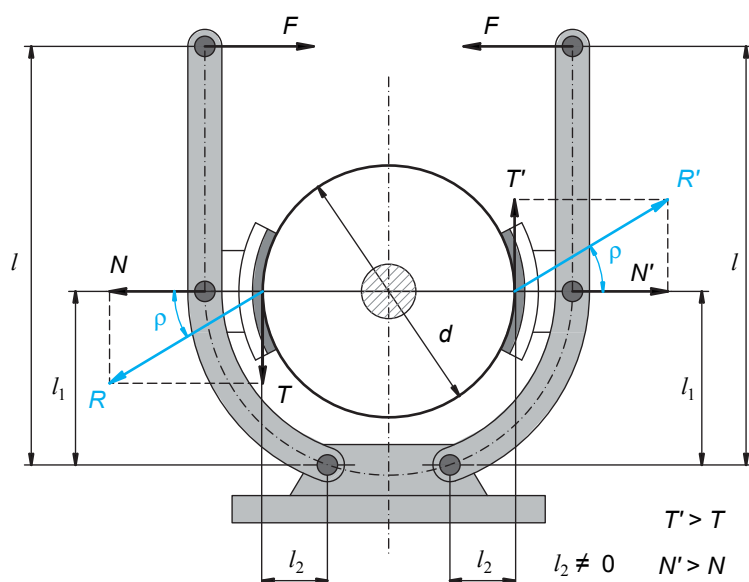


Figura 13.12

Freno a due ceppi esterni (schema).

Nota bene

1. Si può dimostrare che con il senso di serraggio del freno rappresentato nella già citata Figura 13.12, dette T e T' le componenti della reazione della puleggia sul ceppo, agenti tangenzialmente alla puleggia stessa, risulta:

$$T < T'$$

2. Con riferimento alla Figura 13.13, se è: $l_2 = 0$ e quindi: $T = T'$, si può dimostrare che la forza F da applicare a ciascuna leva è esprimibile con la relazione:

$$F = \frac{M_{fr} \cdot l_1}{d \cdot l \cdot f} \quad (14)$$

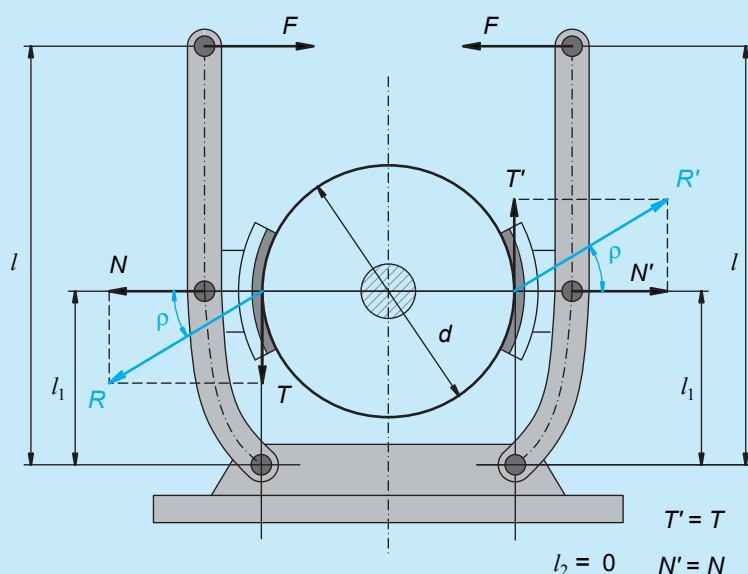


Figura 13.13

Freno a due ceppi esterni (schema).

Se si indicano con a la lunghezza dell'arco di contatto e con b la larghezza assiale del ceppo, la pressione specifica è:

$$p_{sp} = \frac{N}{a \cdot b} = \text{cost.}$$

dove N è la forza *normale* al ceppo.

Per limitare l'usura delle superfici a contatto deve essere rispettata la condizione:

$$p_{sp} \leq p_{sp \text{ adm}}$$

Per ceppi con rivestimenti in ferodo si assume $p_{sp} = 0,08 \div 0,30 \text{ N/mm}^2$; per ceppi in ghisa non rivestiti si può adottare $p_{sp} = 1 \div 2 \text{ N/mm}^2$.

Il coefficiente d'attrito vale normalmente $f = 0,15$ per il contatto ghisa su ghisa e $f = 0,2 \div 0,3$ per il contatto ferodo su ghisa.

Applicazioni

Questi freni sono impiegati nella costruzione di argani per ogni tipo di gru e apparecchio di sollevamento; in generale, sono idonei in tutti i casi in cui vi è la necessità di frenare una massa rotante alla quale è collegato un carico o un sistema traslante.

Approfondimento

Freni negativi

Freni elettroidraulici a ceppi e a disco sono chiamati *negativi* se l'azione frenante è esercitata in assenza di alimentazione elettrica.

In particolare, il *freno a ceppi negativo* a norma DIN 15435 è costituito da due ceppi esterni contrapposti. La forza frenante è ottenuta per mezzo di una molla che, attraverso un insieme di leve, trasmette la propria azione amplificata ai ceppi su cui sono applicate le relative guarnizioni d'attrito.

Il freno viene sbloccato mediante l'attivazione di un servofreno elettroidraulico che contrasta l'azione della molla (**Figura 13.14**).

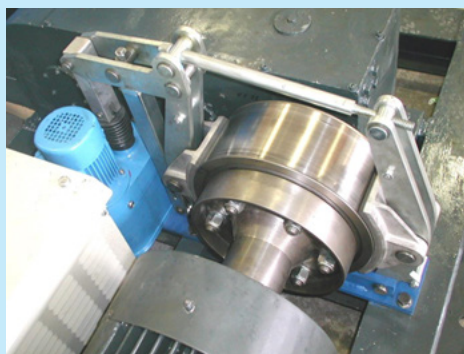


Figura 13.14
Freno a ceppi negativo.

Caratteristiche

Sono caratterizzati da:

- elevata energia di frenata;
- manutenzione semplice;
- buona resistenza all'usura.

Applicazioni

I freni elettromagnetici negativi sono utilizzati negli impianti di sollevamento dei carichi, in robotica, nei trasportatori aerei ecc.

13.6 Freni a ceppi interni

I *freni a ceppi interni*, più noti con il nome di *freni a espansione* o *freni a tamburo*, sono costituiti da due ceppi che agiscono sulla superficie interna di un tamburo.

Questo tipo di freno è largamente impiegato negli autoveicoli; i ceppi (o *ganascce*), in acciaio o in lega d'alluminio, sono rivestiti con guarnizioni di ferodo mentre il tamburo è di ghisa.

13.6.1 Freno a ceppi flottanti

Nel *freno a ceppi flottanti* (Figura 13.15), i ceppi sono tenuti in posizione di riposo mediante due molle elicoidali e poggiano direttamente su due cilindretti di comando. Ogni ganaschia viene fatta accostare al tamburo dalla forza esercitata su una estremità del ceppo da un pistoncino. In questo modo entrambi i ceppi svolgono un'uguale azione frenante. La superficie di contatto tra le guarnizioni e il tamburo è più elevata e la pressione specifica si mantiene su livelli più ridotti rispetto agli altri tipi di freni a espansione; in altre parole, la frenatura risulta più equilibrata di quella ottenuta dagli altri tipi di freni a espansione.

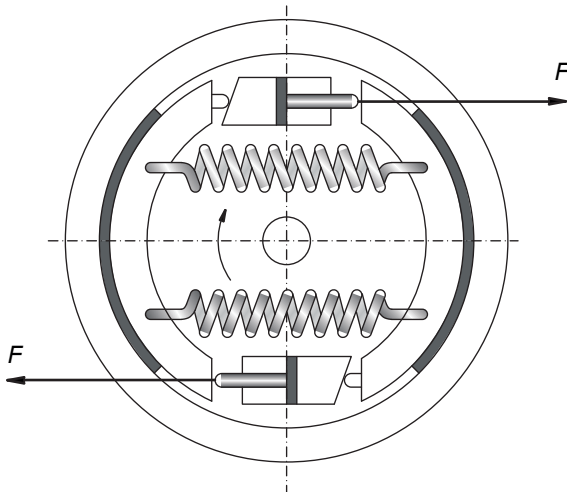
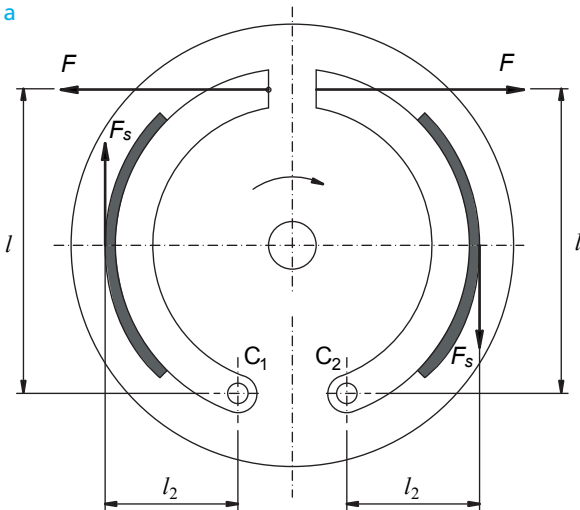


Figura 13.15
Freno a ceppi flottanti (schema).

13.6.2 Freni a ceppi infulcrati

I *freni a ceppi infulcrati* (Figure 16a, b) sono costituiti da un tamburo cavo solidale alle masse rotanti, all'interno del quale sono alloggiati due ceppi, l'uno infulcrato in C_1 , l'altro in C_2 . La forza F è applicata alle estremità libere delle due ganasce tramite una camma (perno a oliva) o un piccolo cilindro oleodinamico. Questa forza fa ruotare i ceppi rivestiti di ferodo attorno ai rispettivi fulcri e li porta a contatto con il tamburo. Il contatto interessa inizialmente le zone delle guarnizioni prossime alle estremità libere e solo in un secondo tempo anche quelle prossime al fulcro.

Figura 13.16
a Freno a ceppi infulcrati (schema).
b Freno a tamburo con ceppi infulcrati.



Al contrario di ciò che accade nei freni con ceppi flottanti, dove la frenatura risulta equilibrata, nei freni a ceppi infulcrati un ceppo, detto *ceppo svolgente*, all'inizio della frenatura tende a staccarsi dal tamburo mentre l'altro, detto *ceppo avvolgente*, è premuto contro il tamburo più del precedente. Di conseguenza, l'azione frenante del ceppo avvolgente è maggiore di quella del ceppo svolgente e la frenatura è squilibrata.

Ciò è dovuto al fatto che all'inizio della frenatura, quando ancora prevale il momento motore su quello dovuto alla forza d'attrito, il tamburo, nello strisciare sui ceppi, produce una forza (*forza di strisciamento* F_s) che fa ruotare i ceppi attorno al loro fulcro.

Infatti il ceppo di sinistra della figura citata è soggetto a un momento $F_s \cdot l_2$ di senso opposto al momento frenante $F \cdot l$, quindi tende a distaccarsi dal tamburo. Il ceppo di destra è soggetto a un momento $F_s \cdot l_2$ che ha lo stesso senso di $F \cdot l$, quindi è premuto contro il tamburo più del ceppo precedente.

Se il contatto tra ceppi e tamburo interessa, per ipotesi, la totalità delle superfici delle guarnizioni, si può dimostrare che il momento frenante complessivo M_{fr} esercitato dal freno a ceppi infulcrati vale:



Dimostrazione delle formule:

$$M_{fr} = f \cdot F_m \cdot d;$$

$$M_{fr} = 2 \cdot f \cdot F \cdot d$$

$$M_{fr} = f \cdot F_m \cdot d \quad (15)$$

ovvero:

$$M_{fr} = 2 \cdot f \cdot F \cdot d \quad (16)$$

dove:

F = forza applicata all'estremità non infulcrata di ogni ceppo;

F_m = spinta che viene esercitata mediamente da ogni ceppo sul tamburo;

d = diametro interno del tamburo;

f = coefficiente d'attrito tra le guarnizioni e il tamburo.

Il coefficiente d'attrito tra le guarnizioni dei ceppi e il tamburo può essere assunto pari a 0,5.

Per quanto riguarda l'applicazione dei freni a tamburo sulle ruote degli autoveicoli, si può dimostrare che per evitare il bloccaggio delle ruote durante la frenatura la forza F_m che deve esercitare mediamente ogni ceppo sul tamburo deve soddisfare l'espressione:



Dimostrazione della formula:

$$F_m > \frac{f' \cdot Q \cdot r_{ruota}}{f \cdot d}$$

$$F_m > \frac{f' \cdot Q \cdot r_{ruota}}{f \cdot d} \quad (17)$$

dove:

f' = *coefficiente di aderenza* tra lo pneumatico e il fondo stradale;

Q = carico agente sulla ruota;

i restanti simboli sono stati spiegati in precedenza.

Per effetto dell'attrito tra le guarnizioni dei ceppi e il tamburo si sviluppa una certa quantità di calore che deve essere accuratamente smaltita.

Lo smaltimento di questo calore ha lo scopo di evitare il surriscaldamento dei freni e, dal momento che il coefficiente d'attrito diminuisce all'aumentare della temperatura, la conseguente riduzione dell'azione frenante. Perciò, per aumentare l'efficacia della frenatura, i tamburi, oltre che essere leggeri e resistenti all'abrasione, devono possedere anche una buona conducibilità termica.

Da parte loro, le guarnizioni, oltre ad avere un elevato coefficiente d'attrito e una buona resistenza all'abrasione, devono essere dotate anche di una buona resistenza alle alte temperature.

13.7 Freni a disco

I *freni a disco* (Figura 13.17) sono costituiti da un disco, generalmente di acciaio o di ghisa al cromo, solidale alla ruota e da una pinza fissata alla struttura portante.

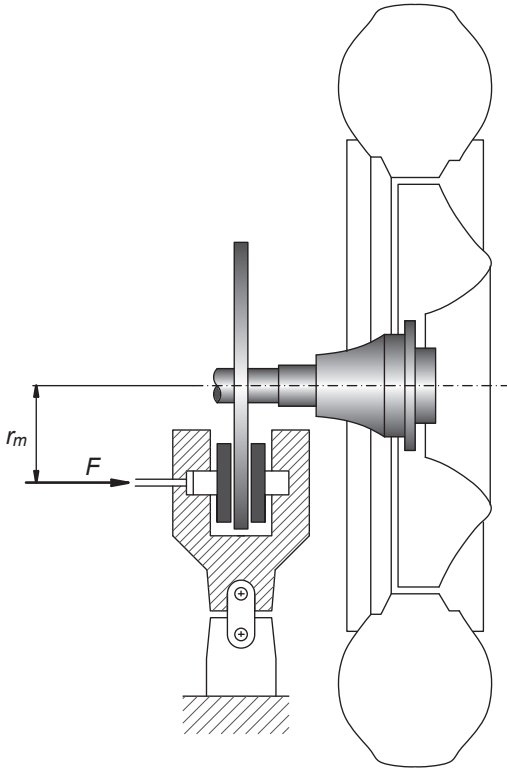


Figura 13.17

Freno a disco (schema).

Nella pinza sono alloggiate una o più coppie di cilindretti idraulici che, tramite stantuffi, comandano lo spostamento assiale di due o più pattini contrapposti, muniti di guarnizioni di ferodo.

La frenatura viene realizzata mediante la spinta dei pattini contro il disco che viene così serrato sulle due facce. L'azione frenante è svolta dalla resistenza d'attrito che si sviluppa tra le guarnizioni dei pattini e le superfici del disco stesso.

La pinza può oscillare in quanto è collegata al telaio tramite bielle (*pinza flottante*); in questo modo essa compensa eventuali difetti di planarità tra le superfici d'attrito.

13.7.1 Confronto tra freni a disco e freni a tamburo

I freni a disco (Figura 13.18) offrono, rispetto a quelli a tamburo, i seguenti vantaggi:

- maggiore rapidità nello smaltimento del calore prodotto per attrito, in quanto sono investiti direttamente dall'aria e possono così disperdere più velocemente il calore; nei freni a espansione lo smaltimento del calore non avviene direttamente all'aria ma attraverso il tamburo;
- più uniforme distribuzione delle pressioni e quindi dell'usura;
- maggiore efficienza in caso di frenata brusca e improvvisa.

I freni a tamburo presentano anche i seguenti svantaggi rispetto ai freni a disco:

- maggiori difficoltà di montaggio e di manutenzione;



Figura 13.18

Freno a disco.

- possibili deformazioni in seguito alle alte temperature che possono raggiungere in esercizio;
- non garantiscono le stesse ottimali prestazioni in condizioni di pioggia e asfalto bagnato;
- necessitano di un più lungo periodo di rodaggio per raggiungere la massima efficienza di frenata.

D'altra parte, i freni a tamburo, anche se più pesanti e con prestazioni inferiori, sono ancora complessivamente più economici e durevoli di quelli a disco.



Dimostrazione della formula:

$$M_{fr. max} = f \cdot p_{sp adm} \cdot (r_e^2 - r_i^2) \cdot \alpha \cdot r_m$$

13.7.2 Determinazione dei parametri principali del freno a disco

Si può dimostrare che il momento frenante massimo ammissibile $M_{fr. max}$ che può essere esercitato da un freno a disco è esprimibile con la relazione:

$$M_{fr. max} = f \cdot p_{sp adm} \cdot (r_e^2 - r_i^2) \cdot \alpha \cdot r_m \quad (18)$$

dove:

f = coefficiente d'attrito: si tratta dell'attrito che si sviluppa tra le guarnizioni (*ferodi*) dei pattini e le superfici del disco;

$p_{sp adm}$ = pressione specifica massima ammissibile [N/mm²];

r_e, r_i = raggi delle circonferenze che limitano rispettivamente all'esterno e all'interno la superficie d'attrito dei pattini [mm]; la zona di contatto tra disco e pastiglia freno è un settore di corona circolare a spigoli raccordati;

r_m = distanza della retta d'azione della forza F dall'asse della ruota [mm];

α = ampiezza angolare di ogni pattino [rad] (Figura 13.19).

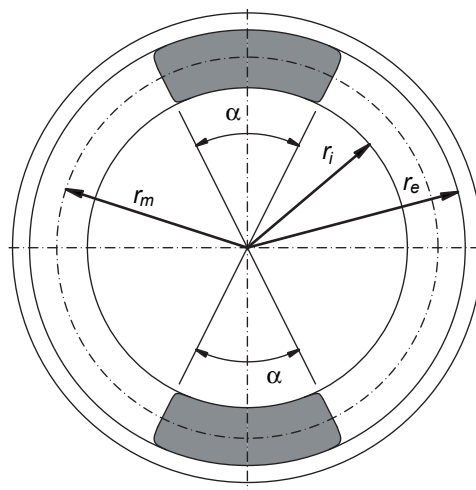


Figura 13.19

Elementi per la determinazione dei parametri principali del freno a disco.

Materiali del disco del freno

La maggioranza dei dischi dei freni montati sugli autoveicoli stradali è in:

- ghisa al cromo-molibdeno, che garantisce un'ottima resistenza all'usura;
- acciaio, che può presentare fenomeni di infragilimento;
- carboceramica, nelle auto estremamente sportive.

ESERCIZI SVOLTI

Argomenti:

A1 Momento frenante M_{fr} – Albero motore

A2 Momento frenante M_{fr} – Volano

B Freno a nastro differenziale

C Freno a nastro

D1 Freno a ceppo – Apparecchio di sollevamento

D2 Freno a ceppo – Volano

E Freno a tamburo

F Freno a disco

A1 Esercizio 1



Calcolare il momento frenante necessario per ridurre la velocità angolare dell'albero motore di una macchina da 180 rad/s a 40 rad/s in 12 secondi. Il momento motore vale 400 N · m, il momento resistente è pari a 30 N · m e il momento d'inerzia delle masse volaniche è 8 kg · m².

SOLUZIONE

Dalla relazione (3') si ricava:

$$\begin{aligned} M_{fr} &= M_m - M_r + J \cdot \frac{\omega_0 - \omega_f}{t} = \\ &= 400 \text{ Nm} - 30 \text{ Nm} + 8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \frac{(180 - 40) \text{ rad/s}}{12 \text{ s}} \approx 463,3 \text{ Nm} \end{aligned}$$

A2 Esercizio 2



Calcolare il momento frenante necessario per fermare in 10 secondi delle masse volaniche aventi momento d'inerzia $J = 6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. La velocità angolare dell'albero motore è $\omega_0 = 150 \text{ rad/s}$; il momento motore è $M_m = 600 \text{ N} \cdot \text{m}$; il momento resistente, dovuto all'attrito dei perni, è $M_r = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$.

SOLUZIONE

In questo caso occorre applicare la relazione (4), da cui si ottiene:

$$M_{fr} = M_m - M_r + \frac{J \cdot \omega_0}{t} = 600 \text{ Nm} - 40 \text{ Nm} + 6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \frac{150 \text{ rad/s}}{10 \text{ s}} = 650 \text{ Nm}$$

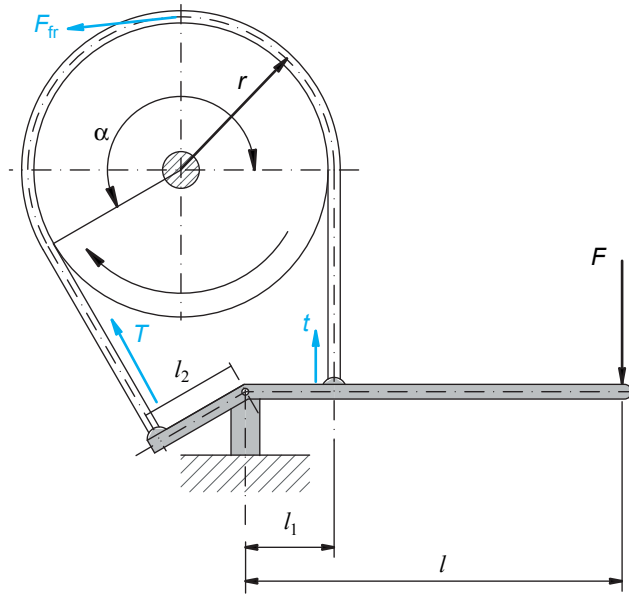
B Esercizio 3

Una fune di acciaio si avvolge su un tamburo di diametro $d_1 = 0,6 \text{ m}$; alla fune è agganciato un carico sospeso $Q = 8 \text{ kN}$ che viene fatto scendere con velocità costante $v_0 = 1,2 \text{ m/s}$. Il tamburo ha un momento d'inerzia di massa $J_1 = 1,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Si richiede di progettare un freno a nastro differenziale, a comando manuale, capace di arrestare la discesa del carico in 0,4 secondi. Determinare inoltre il momento frenante, le tensioni sui rami del nastro e la forza che occorre applicare alla leva di comando.

Figura 13.20

Freno a nastro differenziale (schema).



SOLUZIONE Il momento frenante che occorre realizzare viene calcolato mediante l'espressione (4):

$$M_{fr} = M_m - M_r + \frac{J \cdot \omega_0}{t}$$

nella quale:

$$M_m = Q \cdot \frac{d_1}{2} = 8000 \text{ N} \cdot \frac{0,6 \text{ m}}{2} = 2400 \text{ Nm}$$

rappresenta il momento motore;

$M_r = 0$, in quanto si ritiene trascurabile il momento resistente dovuto all'attrito dei perni;

$$\omega_0 = \frac{v_0}{\frac{d_1}{2}} = \frac{1,2 \text{ m/s}}{\frac{0,6 \text{ m}}{2}} = 4 \text{ rad/s}$$

rappresenta la velocità angolare iniziale del tamburo;

$J = J_1 + J_2$, dove con J_2 si è indicato il momento d'inerzia di massa della puleggia del freno; se supponiamo di adottare una puleggia di diametro $d_2 = 1 \text{ m}$ in acciaio essa, presumibilmente, ha un momento d'inerzia di massa pari a $1,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Risulta:

$$J = (1,4 + 1,8) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 3,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Si ricava:

$$M_{fr} = 2400 \text{ N} \cdot \text{m} + \frac{3,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot 4 \text{ rad/s}}{0,4 \text{ s}} = 2432 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Si stabilisce quindi di adottare per il freno a nastro differenziale le seguenti dimensioni, con riferimento alla **Figura 13.20**:

$$l_2 = 30 \text{ mm}; l_1 = 90 \text{ mm}; l = 600 \text{ mm}$$

L'angolo di avvolgimento α del nastro sulla puleggia risulta uguale a 250° ($\approx 4,36 \text{ rad}$).

Il coefficiente d'attrito, se per ipotesi il nastro è fornito di guarnizioni di ferodo, può ritenersi:

$$f = 0,2$$

Risulta perciò:

$$e^{f \cdot \alpha} \approx 2,39$$

La tensione T del ramo più teso del nastro vale perciò, in base alla (8):

$$T = \frac{M_{fr} \cdot e^{f \cdot \alpha}}{(e^{f \cdot \alpha} - 1) \cdot \frac{d_2}{2}} = \frac{2432 \text{ Nm} \cdot 2,39}{(2,39 - 1) \cdot \frac{1 \text{ m}}{2}} \approx 8363,3 \text{ N}$$

Quella nel ramo meno teso vale, in base alla (7):

$$t = \frac{M_{fr}}{(e^{f \cdot \alpha} - 1) \cdot \frac{d_2}{2}} = \frac{2432 \text{ Nm}}{(2,39 - 1) \cdot \frac{1 \text{ m}}{2}} \approx 3499,3 \text{ N}$$

La forza F da applicare alla leva risulta quindi, in base alla formula (1) reperibile nell'Approfondimento 13.2:

$$F = \frac{-T \cdot l_2 + t \cdot l_1}{l} = \frac{-8363,3 \text{ N} \cdot 30 \text{ mm} + 3499,3 \text{ N} \cdot 90 \text{ mm}}{600 \text{ mm}} \approx 106,73 \text{ N}$$

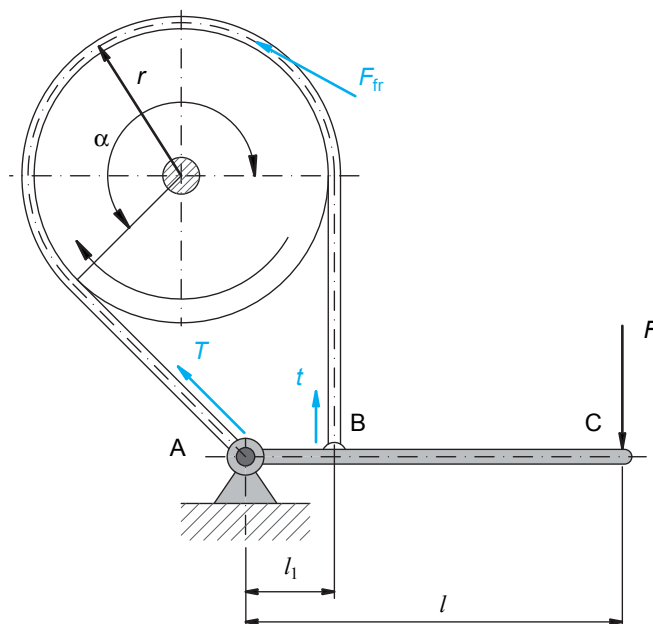
C Esercizio 4

Calcolare la forza massima da applicare all'estremità della leva di comando di un freno a nastro, nonché la forza frenante corrispondente, in base alle seguenti dimensioni della leva, con riferimento alla **Figura 13.21**: $l = 800 \text{ mm}$, $l_1 = 75 \text{ mm}$.

L'angolo di avvolgimento del nastro sulla puleggia è $\alpha = 255^\circ$; la sezione del nastro è $50 \times 4 \text{ mm}$. Assumere come carico unitario di sicurezza dell'acciaio di cui è costituito il nastro $\sigma_{adm} = 60 \text{ N/mm}^2$.

Il nastro è collegato agli attacchi, alle sue estremità, con quattro chiodi di diametro $d = 5 \text{ mm}$ disposti su due file.

Figura 13.21
Freno a nastro ordinario
(schema).



SOLUZIONE La tensione massima di trazione che il nastro può sopportare è: $T = \sigma_{adm} \cdot S_{res}$, dove S_{res} , area della sezione resistente, vale, in base all'espressione (10):

$$S_{res} = s \cdot (b - z \cdot d) = 4 \text{ mm} \cdot (50 - 2 \cdot 5) \text{ mm} = 160 \text{ mm}^2$$

dato che è $b = 50 \text{ mm}$ la larghezza del nastro e $s = 4 \text{ mm}$ il suo spessore; si deve tener presente che i quattro chiodi sono disposti su due file.

Si ricava:

$$T = 60 \text{ N/mm}^2 \cdot 160 \text{ mm}^2 = 9600 \text{ N}$$

Dal momento che l'angolo di avvolgimento è $\alpha = 255^\circ$, corrispondente a:

$$\alpha_{\text{rad}} = 255 \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \approx 4,45 \text{ radianti}$$

risulta:

$$e^{f \cdot \alpha} = e^{(0,16 \cdot 4,45)} \approx 2,04$$

in quanto si è assunto per il coefficiente d'attrito:

$$f = 0,16$$

Si ha perciò, dalla (5):

$$t = \frac{T}{e^{f \cdot \alpha}} = \frac{9600 \text{ N}}{2,04} \approx 4706 \text{ N}$$

Dall'equazione di equilibrio alla rotazione della leva di comando attorno al fulcro:

$$F \cdot l = t \cdot l_1$$

si ricava:

$$F_{\text{max}} = t \cdot \frac{l_1}{l} = 4706 \text{ N} \cdot \frac{75 \text{ mm}}{800 \text{ mm}} = 441,2 \text{ N}$$

La forza frenante corrispondente vale, in base alla relazione $F_{\text{fr}} = T - t$:

$$F_{\text{fr}} = T - t = 9600 \text{ N} - 4706 \text{ N} = 4894 \text{ N}$$

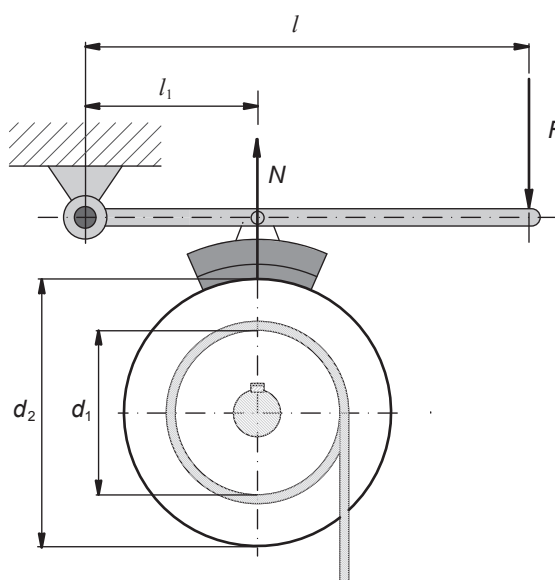
D1 Esercizio 5

Calcolare quale forza F occorre esercitare all'estremità della leva di un freno a ceppo a comando manuale (Figura 13.22), utilizzato in un apparecchio di sollevamento, per mantenere in posizione un peso $Q = 981 \text{ N}$. La fune di sollevamento si avvolge su un tamburo di diametro $d_1 = 180 \text{ mm}$, solidale al freno.

Il coefficiente d'attrito tra il ceppo e la puleggia del freno è $f = 0,5$; il diametro della puleggia è $d_2 = 280 \text{ mm}$. Sono inoltre assegnate le seguenti dimensioni: $l = 800 \text{ mm}$; $l_1 = 100 \text{ mm}$.

Figura 13.22

Freno a ceppo a comando manuale (schema).



SOLUZIONE

Il peso Q che pone in trazione la fune produce un momento, calcolato rispetto all'asse del tamburo sul quale si avvolge la fune, che vale:

$$M_Q = Q \cdot \frac{d_1}{2} = 981 \text{ N} \cdot \frac{0,18 \text{ m}}{2} \approx 88,29 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Questo momento è equilibrato dalla forza tangenziale T esercitata dal ceppo sulla puleggia del freno; pertanto è:

$$T = \frac{M_Q}{\frac{d_2}{2}} = \frac{88,29 \text{ N} \cdot \text{m}}{\frac{0,28 \text{ m}}{2}} \approx 630,6 \text{ N}$$

D'altra parte è:

$$T = f \cdot N$$

e quindi anche:

$$N = \frac{T}{f}$$

La forza radiale N esercitata dal ceppo sulla puleggia del freno vale:

$$N = \frac{630,6 \text{ N}}{0,5} \approx 1261,2 \text{ N}$$

Di conseguenza, per l'equilibrio alla rotazione della leva attorno al suo fulcro si ha:

$$N \cdot l_1 = F \cdot l$$

Pertanto la forza da applicare all'estremità della leva di comando del freno per mantenere in posizione il peso Q vale:

$$F = \frac{N \cdot l_1}{l} = \frac{1261,2 \text{ N} \cdot 100 \text{ mm}}{800 \text{ mm}} \approx 157,65 \text{ N}$$

D2**Esercizio 6**

Calcolare il peso che occorre porre all'estremità della leva di un freno a ceppo a comando manuale per arrestare un volano di diametro $d = 0,6 \text{ m}$, rotante con frequenza di rotazione $n = 600 \text{ giri/min}$ e avente momento d'inerzia di massa $J = 12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

A partire dall'istante d'inizio dell'operazione di frenatura il volano può effettuare al massimo 120 giri prima di fermarsi.

SOLUZIONE

Nell'istante d'inizio della frenatura, la massa volanica possiede ancora un'energia cinetica di rotazione E_1 che vale:

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega_0^2$$

Dato che è:

$$\omega_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 600 \text{ giri/min}}{60} \approx 62,83 \text{ rad/s}$$

si ha:

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot 12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot (62,83 \text{ rad/s})^2 \approx 23\,686 \text{ J}$$

Nel corso della frenatura questa energia si trasforma totalmente nel lavoro d'attrito:

$$L_{\text{attr}} = M_{\text{fr.}} \cdot \beta$$

dove $M_{fr.}$ è il momento frenante e β è l'angolo di cui ruota il volano prima di fermarsi. Nel nostro caso è:

$$\beta = 2 \cdot \pi \text{ rad} \cdot (120 \text{ giri}) \approx 753,98 \text{ rad}$$

Dall'equazione d'equilibrio:

$$E_1 = L_{attr} = M_{fr.} \cdot \beta$$

si ricava il momento frenante:

$$M_{fr.} = \frac{E_1}{\beta} = \frac{23\,686 \text{ J}}{753,98 \text{ rad}} \approx 31,41 \text{ N} \cdot \text{m}$$

La forza frenante T vale perciò:

$$T = \frac{M_{fr.}}{\frac{d}{2}}$$

dove d è il diametro del volano. Si ottiene:

$$T = \frac{31,41 \text{ N} \cdot \text{m}}{\frac{0,6 \text{ m}}{2}} \approx 104,7 \text{ N}$$

Se si assume come coefficiente d'attrito tra il ceppo, rivestito di una guarnizione di ferodo, e il volano, in acciaio:

$$f = 0,3$$

e dato che è:

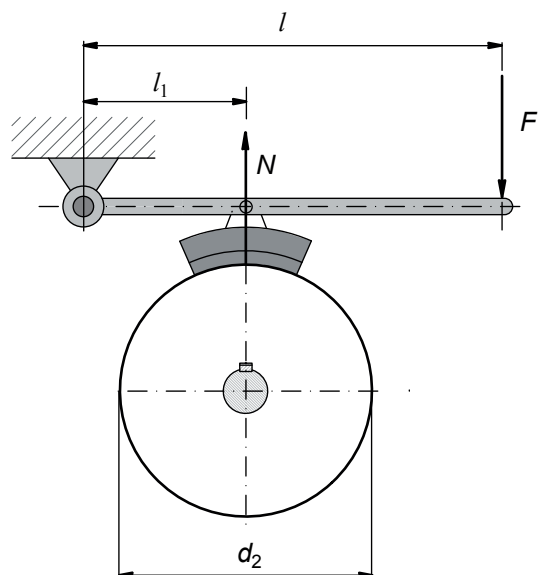
$$T = f \cdot N$$

risulta:

$$N = \frac{T}{f} = \frac{104,7 \text{ N}}{0,3} \approx 349 \text{ N}$$

Dall'equilibrio alla rotazione della leva di comando attorno al suo fulcro: $F \cdot l = N \cdot l_1$, si ricava:

$$F = \frac{N \cdot l_1}{l}$$



Fissiamo, per ipotesi, i seguenti valori: $l = 600 \text{ mm}$; $l_1 = 100 \text{ mm}$ (Figura 13.23); si ha:

$$F = 349 \text{ N} \cdot \frac{100 \text{ mm}}{600 \text{ mm}} \approx 58,17 \text{ N}$$

Si deve perciò porre all'estremità della leva di comando una massa m pari a:

$$m = \frac{F}{g} = \frac{58,17 \text{ N}}{9,81 \text{ m/s}^2} \approx 5,93 \text{ kg}$$

Figura 13.23

Freno a ceppo a comando manuale (schema).

E Esercizio 7

Sulle due ruote posteriori di un autoveicolo sono montati freni a tamburo; calcolare il momento frenante che si rende necessario per ciascuna ruota posteriore per arrestare la vettura. Si è a conoscenza che: la massa del veicolo a pieno carico è $m = 1100 \text{ kg}$, il coefficiente d'attrito tra lo pneumatico e la sede stradale asfaltata, asciutta, è $f_1 = 0,6$ e il diametro delle ruote è $d = 560 \text{ mm}$.

SOLUZIONE

Durante la frenata si scarica, secondo la nostra ipotesi, sulle ruote anteriori il 65% del peso della vettura; di conseguenza le ruote posteriori sono interessate da un carico complessivo pari a:

$$Q = 0,35 \cdot m \cdot g = 0,35 \cdot 1100 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \approx 3777 \text{ N}$$

Ciascuna ruota posteriore è perciò gravata da un peso:

$$Q_1 = \frac{Q}{2} = \frac{3777 \text{ N}}{2} \approx 1888 \text{ N}$$

Durante la frenata il momento frenante deve eguagliare il momento di rotolamento applicato a ciascuna ruota posteriore, per cui si ha:

$$M_{fr.} = f_1 \cdot Q_1 \cdot \frac{d}{2} = 0,6 \cdot 1888 \text{ N} \cdot \frac{0,56 \text{ m}}{2} \approx 317,2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

F Esercizio 8

Calcolare il momento frenante massimo che può realizzare un freno a disco i cui pattini hanno le seguenti dimensioni (**Figura 13.24**):

- raggio esterno: $r_e = 160 \text{ mm}$;
- raggio interno: $r_i = 110 \text{ mm}$;
- ampiezza angolare: $\alpha = 60^\circ$.

La pressione ammissibile è $p_{sp \text{ adm}} = 0,3 \text{ N/mm}^2$; il coefficiente d'attrito è $f = 0,5$.

SOLUZIONE

Dato che è:

$$r_m = \frac{r_e + r_i}{2} = \frac{(160 + 110) \text{ mm}}{2} = 135 \text{ mm}$$

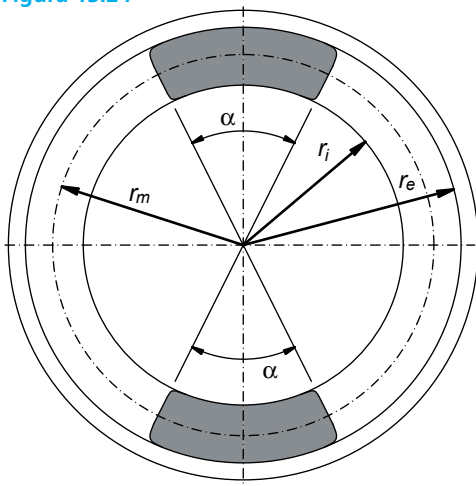
in base alla relazione (18) si ricava:

$$\begin{aligned} M_{fr \text{ max}} &= f \cdot p_{sp \text{ adm}} \cdot (r_e^2 - r_i^2) \cdot \alpha \cdot r_m = \\ &= 0,5 \cdot 0,3 \text{ N/mm}^2 \cdot (160^2 - 110^2) \text{ mm}^2 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 135 \text{ mm} \approx \\ &\approx 286\,278 \text{ N} \cdot \text{mm} \approx 286,28 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

con:

$$\alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \left(= 60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \right)$$

Figura 13.24



VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO

Riconoscere se le seguenti affermazioni sono vere (V) o false (F).

1. I freni a nastro sono utilizzabili in modo proficuo solo se la puleggia ha un solo senso di rotazione. ☐ V ☐ F
2. I freni a ceppi esterni sono un tipo di freni avvolgenti. ☐ V ☐ F
3. I due ceppi di un freno a ceppi infulcrati svolgono un'azione frenante di uguale intensità. ☐ V ☐ F
4. Nei freni a disco non vi è alcun dispositivo di compensazione di eventuali difetti di planarità tra le superfici d'attrito. ☐ V ☐ F
5. I freni a disco disperdono con maggior facilità dei freni a tamburo il calore prodotto per attrito. ☐ V ☐ F
6. I meccanismi di arresto ad attrito sono più rumorosi degli arpionismi. ☐ V ☐ F

QUESITI

Individuare la risposta esatta ai seguenti quesiti a risposta multipla.

1. Rispetto ai freni con ceppi infulcrati, i freni a ceppi flottanti hanno:
 - ☐ a una maggiore pressione specifica tra le guarnizioni e il tamburo
 - ☐ b una superficie di contatto più elevata
 - ☐ c un coefficiente d'attrito molto minore
 - ☐ d un impiego molto più limitato
2. I meccanismi d'arresto hanno il compito di:
 - ☐ a aumentare il momento frenante di un freno ad attrito
 - ☐ b impedire in ogni caso qualsiasi movimento a un organo rotante
 - ☐ c consentire a un organo meccanico di spostarsi in un sol senso
 - ☐ d sostituirsi ai freni nella manovra di frenatura se questi non funzionano
3. La forza frenante di un freno a nastro è uguale:
 - ☐ a alla somma delle tensioni dei due rami del nastro
 - ☐ b alla maggiore tra le tensioni dei due rami del nastro
 - ☐ c alla differenza delle tensioni dei due rami del nastro
 - ☐ d alla media aritmetica tra le tensioni dei due rami del nastro
4. Nei freni a nastro, le tensioni T del ramo più teso del nastro e t relativa al ramo meno teso sono tra loro correlate dall'espressione:
 - ☐ a $T = \frac{t}{e^{f \cdot \alpha}}$
 - ☐ b $T = t^{f \cdot \alpha}$
 - ☐ c $T = t \cdot e^{f \cdot \alpha}$
 - ☐ d $T = \frac{t}{e^{f \cdot \alpha} - 1}$

dove f è il coefficiente d'attrito e α l'angolo di avvolgimento del nastro sulla puleggia.