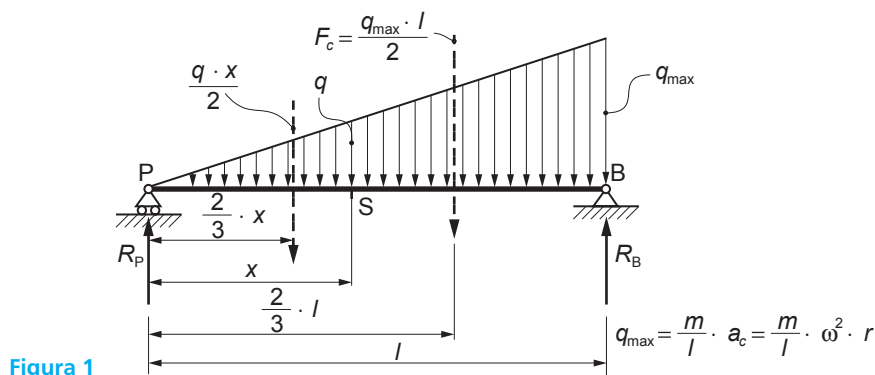


4.5

Dimostrazione della formula: $M_{f_{\max}} = \frac{2}{9 \cdot \sqrt{3}} \cdot F_c \cdot l \approx 0,128 \cdot F_c \cdot l$

La biella viene assimilata a una generica trave isostatica avente le seguenti caratteristiche:

- lunghezza l ;
- sezione costante del fusto, di area A_{fusto} ;
- appoggiata alle estremità;
- soggetta a un carico F_c distribuito linearmente (Figura 1).



La procedura di calcolo che seguiamo si articola in tre parti:

1. risoluzione della trave;
2. studio della sollecitazione di taglio;
3. studio della sollecitazione di flessione.

1. Risoluzione della trave

Indichiamo con R_P e R_B le reazioni vincolari rispettivamente sugli appoggi P e B e ne ipotizziamo il verso come in Figura 1.

Se applichiamo l'equazione di equilibrio alla rotazione rispetto al punto P otteniamo:

$$R_B \cdot l + F_c \cdot \frac{2}{3} \cdot l = 0$$

da cui:

$$R_B = -\frac{2}{3} \cdot F_c \quad (1)$$

Se applichiamo l'equazione di equilibrio alla rotazione rispetto al punto B otteniamo:

$$R_P \cdot l - F_c \cdot \frac{1}{3} \cdot l = 0$$

da cui:

$$R_P = \frac{1}{3} \cdot F_c \quad (2)$$

Il carico F_c è distribuito con legge lineare sull'intera lunghezza l della trave; detto q [N/m] il generico valore del carico distribuito, si ha:

$$\begin{aligned} q &= 0 & \text{per: } x &= 0 \\ q &= q_{\max} & \text{per: } x &= l \end{aligned}$$

L'area triangolare della distribuzione del carico è equivalente alla forza F_c ; ovvero, la forza F_c è esprimibile dalla relazione:

$$F_c = \frac{q_{\max} \cdot l}{2} \quad [\text{N}] \quad (3)$$

Se si sostituisce la (3) nella (1) e nella (2) si ricava:

$$R_B = \frac{2}{3} \cdot F_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{q_{\max} \cdot l}{2} = \frac{q_{\max} \cdot l}{3} \quad [\text{N}]$$

$$R_P = \frac{1}{3} \cdot F_c = \frac{1}{3} \cdot \frac{q_{\max} \cdot l}{2} = \frac{q_{\max} \cdot l}{6} \quad [\text{N}] \quad (4)$$

2. Studio della sollecitazione di taglio

Per una generica sezione come S , distante x da P , se consideriamo ad esempio le forze applicate a sinistra di S , il taglio T_S vale:

$$T_S = -q \cdot \frac{x}{2} + R_P = -q \cdot \frac{x}{2} + \frac{q_{\max} \cdot l}{6} \quad (5)$$

Sulla base della similitudine fra il triangolo rettangolo di base x e altezza q e quello di base l e altezza q_{\max} possiamo scrivere la proporzione:

$$q : q_{\max} = x : l$$

da cui si ricava:

$$q = \frac{q_{\max} \cdot x}{l} \quad (6)$$

Se si sostituisce la (6) nella (5) si ottiene:

$$T_S = -q \cdot \frac{x}{2} + \frac{q_{\max} \cdot l}{6} = -\frac{q_{\max} \cdot x}{l} \cdot \frac{x}{2} + \frac{q_{\max} \cdot l}{6} = q_{\max} \cdot \left(-\frac{x^2}{2 \cdot l} + \frac{l}{6} \right) \quad (7)$$

Come è stato detto nel secondo volume di questo Corso, in una trave inflessa il momento flettente è massimo dove il taglio è nullo. Se poniamo $T_S = 0$, la (7) diventa:

$$q_{\max} \cdot \left(-\frac{x^2}{2 \cdot l} + \frac{l}{6} \right) = 0$$

ovvero:

$$\frac{x^2}{2 \cdot l} = \frac{l}{6}$$

cioè, scartata la soluzione negativa:

$$x = \frac{l}{\sqrt{3}} \approx 0,577 \cdot l$$

3. Studio della sollecitazione di flessione

Per una generica sezione come S , distante x da P , se consideriamo i momenti, calcolati rispetto a S , delle forze applicate ad esempio a sinistra di S , il momento M_S vale:

$$M_S = +R_P \cdot x - \frac{q \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{3} \quad (8)$$

In base alla (4) e alla (6), la (8) diviene:

$$M_s = +R_p \cdot x - \frac{q \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{3} = +\frac{q_{\max} \cdot l}{6} \cdot x - \frac{q_{\max} \cdot x}{l} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3}$$

cioè:

$$M_s = \frac{q_{\max}}{6} \cdot \left(-\frac{x^3}{l} + l \cdot x \right) \quad (9)$$

Per $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$ la (9) diviene:

$$\begin{aligned} M_s = M_{f \max} &= \frac{q_{\max}}{6} \cdot \left[-\left(\frac{l}{\sqrt{3}} \right)^3 \cdot \frac{1}{l} + l \cdot \frac{l}{\sqrt{3}} \right] = \frac{q_{\max}}{6} \cdot \left(-\frac{l^2}{3 \cdot \sqrt{3}} + \frac{l^2}{\sqrt{3}} \right) = \quad (10) \\ &= \frac{q_{\max}}{6} \cdot \left(+\frac{2 \cdot l^2}{3 \cdot \sqrt{3}} \right) = +q_{\max} \cdot \frac{l^2}{9 \cdot \sqrt{3}} \approx +0,064 \cdot q_{\max} \cdot l^2 \end{aligned}$$

Il valore massimo q_{\max} assunto dal carico variabile linearmente può essere espresso dalla relazione:

$$q_{\max} = \frac{m}{l} \cdot a_c = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot r}{l} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right] \quad (11)$$

dove:

m = massa della biella [kg];

l = lunghezza della biella [m].

Se si sostituisce la (11) nella (10) si ricava:

$$M_{f \max} = +\frac{m \cdot \omega^2 \cdot r}{l} \cdot \frac{l^2}{9 \cdot \sqrt{3}} = +\frac{m \cdot \omega^2 \cdot r \cdot l}{9 \cdot \sqrt{3}} \approx +0,064 \cdot m \cdot \omega^2 \cdot r \cdot l \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (12)$$

D'altra parte, dalle espressioni:

$$F_c = \frac{q_{\max} \cdot l}{2}$$

e:

$$q_{\max} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot r}{l}$$

si ricava:

$$F_c = \frac{m}{l} \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \frac{l}{2} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot r}{2} = \frac{m \cdot a_c}{2} \quad [\text{N}]$$

ovvero:

$$m \cdot \omega^2 \cdot r = 2 \cdot F_c \quad (13)$$

Se si sostituisce la (13) nella (12), si ottiene:

$$M_{f \max} = F_c \cdot \frac{2 \cdot l}{9 \cdot \sqrt{3}} \approx +0,128 \cdot F_c \cdot l \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$