

## 4.4

## Dimostrazione della formula esatta:

$$F_t = F_{\text{tot}} \cdot \left[ \text{sen } \alpha + \frac{\text{sen}(2 \cdot \alpha)}{2 \cdot \sqrt{\mu^2 - \text{sen}^2 \alpha}} \right]$$

## e della formula approssimata:

$$F_t = F_{\text{tot}} \cdot \left[ \text{sen } \alpha + \frac{\text{sen}(2 \cdot \alpha)}{2 \cdot \mu} \right]$$

In base alla formula trigonometrica di addizione:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \text{sen } \beta$$

l'espressione (7) del testo a stampa:

$$F_t = F_{\text{tot}} \cdot \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\cos \beta}$$

può scriversi:

$$F_t = F_{\text{tot}} \cdot \frac{\text{sen } \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \text{sen } \beta}{\cos \beta} = F_{\text{tot}} \cdot \left( \text{sen } \alpha + \cos \alpha \cdot \frac{\text{sen } \beta}{\cos \beta} \right) \quad (1)$$

La relazione che intercorre tra gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  del meccanismo biella-manovella è:

$$\text{sen } \beta = \frac{r}{l} \cdot \text{sen } \alpha = \frac{1}{\mu} \cdot \text{sen } \alpha \quad (2)$$

Dall'identità fondamentale della trigonometria:

$$\text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

si ricava la formula:

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \beta}$$

Questa relazione diviene, in base alla (2):

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \beta} = \sqrt{1 - \left( \frac{1}{\mu} \cdot \text{sen } \alpha \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \cdot \text{sen}^2 \alpha} = \sqrt{\frac{\mu^2 - \text{sen}^2 \alpha}{\mu^2}}$$

cioè:

$$\cos \beta = \sqrt{\frac{\mu^2 - \text{sen}^2 \alpha}{\mu^2}} = \sqrt{\frac{\mu^2 - \text{sen}^2 \alpha}{\mu}} \quad (3)$$

Se si sostituiscono le espressioni (2) e (3) nella (1) si ottiene:

$$F_t = F_{\text{tot}} \cdot \left( \text{sen } \alpha + \cos \alpha \cdot \frac{\text{sen } \beta}{\cos \beta} \right) = F_{\text{tot}} \cdot \left( \text{sen } \alpha + \cos \alpha \cdot \frac{\frac{1}{\mu} \cdot \text{sen } \alpha}{\sqrt{\frac{\mu^2 - \text{sen}^2 \alpha}{\mu}}} \right)$$

ovvero:

$$F_t = F_{\text{tot}} \cdot \left( \text{sen } \alpha + \frac{\text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha}{\sqrt{\mu^2 - \text{sen}^2 \alpha}} \right) \quad (4)$$

Dalla formula trigonometrica di duplicazione:

$$\sin(2 \cdot \alpha) = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

si ricava:

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sin(2 \cdot \alpha)}{2} \quad (5)$$

Se si inserisce la (5) nella (4) si ottiene:

$$F_t = F_{\text{tot}} \cdot \left[ \sin \alpha + \frac{\sin(2 \cdot \alpha)}{2 \cdot \sqrt{\mu^2 - \sin^2 \alpha}} \right] \quad (6)$$

Se si considera il termine  $\sin^2 \alpha$  trascurabile rispetto a  $\mu^2$  la (6) diventa:

$$F_t = F_{\text{tot}} \cdot \left[ \sin \alpha + \frac{\sin(2 \cdot \alpha)}{2 \cdot \mu} \right]$$