

9.11

Dimostrazione della formula della freccia f di una barra

di torsione: $f = \frac{32 \cdot F \cdot b^2 \cdot l}{\pi \cdot G \cdot d^4}$

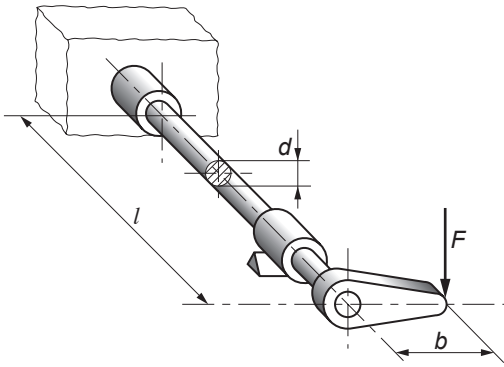


Figura 1
Barra di torsione.

Consideriamo un'asta cilindrica di lunghezza l e diametro d , incastrata a una estremità e fornita, all'estremità libera, di un braccio trasversale di lunghezza b rigidamente collegato alla barra stessa (**Figura 1**).

Se all'estremità del braccio b si applica la forza F , essa genera un momento torcente M_t :

$$M_t = F \cdot b$$

il quale a sua volta determina una rotazione ϑ della sezione d'estremità rispetto a quella d'incastro, che vale:

$$\vartheta = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} \quad (1)$$

dove I_p è il momento d'inerzia polare che, per una barra di sezione circolare, vale:

$$I_p = \frac{\pi}{32} \cdot d^4 \quad (2)$$

e G è il modulo di elasticità tangenziale che può essere assunto pari a:

$$G = 0,385 \cdot E$$

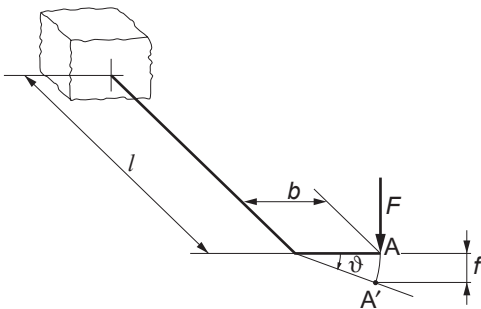
Se si inserisce l'espressione (2) nella (1) si ricava:

$$\vartheta = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot \frac{\pi}{32} \cdot d^4} = \frac{32 \cdot M_t \cdot l}{\pi \cdot G \cdot d^4} \quad (3)$$

ovvero, in base alla relazione $M_t = F \cdot b$:

$$\vartheta = \frac{32 \cdot F \cdot b \cdot l}{\pi \cdot G \cdot d^4} \quad (4)$$

Figura 2
Barra di torsione (schema).



D'altra parte l'estremità A del braccio trasversale (**Figura 2**) subisce uno spostamento (l'arco $\widehat{AA'}$) che vale:

$$\widehat{AA'} = b \cdot \vartheta \quad (5)$$

Dal momento che l'angolo ϑ dovuto alla torsione è molto piccolo, l'espressione (5) può anche scriversi:

$$f = b \cdot \vartheta \quad (6)$$

dove con f si è indicata la freccia, cioè lo spostamento verticale di A.

Se si inserisce l'espressione (4) nella (6) si ricava:

$$f = \frac{32 \cdot F \cdot b^2 \cdot l}{\pi \cdot G \cdot d^4} \quad (7)$$