

2.5

Dimostrazione della formula del rendimento del ciclo Diesel:

$$\eta_{\text{Diesel}} = 1 - \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\rho_{\text{compr}}^{(k-1)}} \cdot \frac{\sigma^k - 1}{\sigma - 1}$$

Il rendimento η di un ciclo termodinamico è espresso dal rapporto tra il calore utilizzato, cioè trasformato in lavoro, ovvero il calore ($q_{\text{sup}} - q_{\text{inf}}$), e il calore disponibile q_{sup} , dove:

- q_{sup} è il calore fornito dalla *sorgente superiore*, cioè dalla sorgente termica a temperatura più elevata;
- q_{inf} è il calore ceduto alla *sorgente fredda* (o *sorgente inferiore*).

Risulta cioè:

$$\eta = \frac{q_{\text{sup}} - q_{\text{inf}}}{q_{\text{sup}}} = 1 - \frac{q_{\text{inf}}}{q_{\text{sup}}} \quad (1)$$

Dall'esame del ciclo Diesel teorico si rileva che, per quanto riguarda la trasformazione isobarica 2-3, vale la relazione:

$$q_{\text{sup}} = c_p \cdot (T_3 - T_2) \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (2)$$

Analogamente, per la trasformazione isocora 4-1 si ha:

$$q_{\text{inf}} = c_v \cdot (T_4 - T_1) \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (3)$$

L'espressione (1) può allora scriversi:

$$\eta_{\text{Diesel}} = 1 - \frac{q_{\text{inf}}}{q_{\text{sup}}} = 1 - \frac{c_v \cdot (T_4 - T_1)}{c_p \cdot (T_3 - T_2)} \quad (4)$$

o anche:

$$\eta_{\text{Diesel}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{k \cdot (T_3 - T_2)} \quad (5)$$

dove è:

$$k = \frac{c_p}{c_v}$$

La relazione (5) può anche assumere la forma seguente, utile per i calcoli successivi:

$$\eta_{\text{Diesel}} = 1 - \frac{T_1 \cdot \left(\frac{T_4}{T_1} - 1 \right)}{k \cdot T_2 \cdot \left(\frac{T_3}{T_2} - 1 \right)} \quad (6)$$

Per quanto riguarda la trasformazione adiabatica 1-2 di compressione vale la relazione:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{k-1} \quad (7)$$

che può scriversi:

$$T_1 = T_2 \cdot \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{k-1} \quad (8)$$

Analogamente, per la trasformazione adiabatica 3-4 di espansione si ha:

$$\frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{v_4}{v_3} \right)^{k-1} \quad (9)$$

che può scriversi:

$$T_4 = T_3 \cdot \left(\frac{v_3}{v_4} \right)^{k-1} \quad (10)$$

Se dividiamo membro a membro l'espressione (10) con la (8) ricaviamo:

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} \cdot \left(\frac{v_3}{v_4} \cdot \frac{v_1}{v_2} \right)^{k-1} = \frac{T_3}{T_2} \cdot \left(\frac{v_3}{v_2} \right)^{k-1} \quad (11)$$

dato che è per l'isocora 4-1:

$$v_1 = v_4$$

Se introduciamo le relazioni (7) e (11) nell'espressione (6) del rendimento otteniamo:

$$\eta_{\text{Diesel}} = 1 - \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{k-1} \cdot \frac{\frac{T_3}{T_2} \cdot \left(\frac{v_3}{v_2} \right)^{k-1} - 1}{\frac{T_3}{T_2} - 1} \quad (12)$$

D'altra parte, dalla trasformazione isobarica 2-3 si ha:

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{v_3}{v_2} \quad (13)$$

Se si sostituisce la relazione (13) nella (12) si ricava:

$$\eta_{\text{Diesel}} = 1 - \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{k-1} \cdot \frac{\frac{v_3}{v_2} \cdot \left(\frac{v_3}{v_2} \right)^{k-1} - 1}{\frac{v_3}{v_2} - 1} = 1 - \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{k-1} \cdot \frac{\left(\frac{v_3}{v_2} \right)^k - 1}{\frac{v_3}{v_2} - 1} \quad (14)$$

Se indichiamo con: $\rho_{\text{compr}} = \frac{v_1}{v_2}$ il rapporto volumetrico di compressione e con: $\sigma = \frac{v_3}{v_2}$ il rapporto volumetrico di combustione a pressione costante, l'espressione (14) diviene:

$$\eta_{\text{Diesel}} = 1 - \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\rho_{\text{compr}}^{(k-1)}} \cdot \frac{\sigma^k - 1}{\sigma - 1}$$