

ESERCIZI SVOLTI

Argomenti:

B Ciclo Otto: calcolo del rendimento; rappresentazione del ciclo

C Ciclo Diesel: calcolo del rendimento; rappresentazione del ciclo

B Esercizio 1



Determinare il rendimento di un ciclo Otto avente rapporto volumetrico di compressione $\rho_{\text{compr}} = 10$.

Calcolare inoltre i valori del volume massico, della temperatura e della pressione in corrispondenza dei punti finali di ognuna delle trasformazioni termodinamiche di cui si compone il ciclo. Si è a conoscenza che all'inizio della compressione adiabatica la pressione p_1 è quella atmosferica e la temperatura vale $T_1 = 20^\circ\text{C}$ e che durante la compressione isocora (tratto 2-3 del ciclo di Figura 2.13) viene fornita al fluido, che secondo la nostra ipotesi è aria, una quantità di calore q_{sup} pari a 2 MJ/kg. Tracciare infine sul piano di Clapeyron (p, v) il ciclo stesso sulla base dei risultati ottenuti.

SOLUZIONE

Dalla relazione (12) si ricava:

$$\eta_{\text{Otto}} = 1 - \frac{1}{\rho_{\text{compr}}^{k-1}} = 1 - \frac{1}{10^{(1,4-1)}} \approx 0,6 \approx 60\%$$

in quanto si è assunto:

$$k_{\text{aria}} \left(= \frac{c_p}{c_v} \right) = 1,4$$

All'inizio della compressione adiabatica si ha:

$$p_1 = 101\,325 \text{ Pa}$$

$$T_1 = (273,15 + 20) \text{ K} = 293,15 \text{ K}$$

Dall'equazione di stato dei gas perfetti:

$$p_1 \cdot v_1 = R_{\text{aria}} \cdot T_1$$

si ottiene:

$$v_1 = \frac{R_{\text{aria}} \cdot T_1}{p_1} = \frac{287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 293,15 \text{ K}}{101325 \text{ Pa}} \approx 0,83 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

dato che si è assunto:

$$R_{\text{aria}} = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

Per quanto riguarda la temperatura T_2 di fine compressione adiabatica, essa si ricava dalla relazione:

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{k-1}$$

relativa alle trasformazioni adiabatiche.

In base al rapporto volumetrico di compressione ρ_{compr} che vale, per definizione:

$$\rho_{\text{compr}} = \frac{v_1}{v_2}$$

l'espressione di T_2 diviene:

$$T_2 = T_1 \cdot \rho_{\text{compr}}^{k-1} = 293,15 \text{ K} \cdot 10^{(1,4-1)} \approx 736,36 \text{ K}$$

Per quanto riguarda il volume massico v_2 , dalla precedente definizione di ρ_{compr} si ottiene:

$$v_2 = \frac{v_1}{\rho_{\text{compr}}} = \frac{0,83 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}}{10} = 0,083 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

La pressione p_2 di fine compressione adiabatica vale, in base all'equazione di stato dei gas perfetti:

$$p_2 = \frac{R_{\text{aria}} \cdot T_2}{v_2} = \frac{287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 736,36 \text{ K}}{0,083 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}} \approx 2546209 \text{ Pa} \approx 2,55 \text{ MPa}$$

La temperatura finale T_3 della successiva trasformazione, l'isocora 2-3, è determinabile dall'equazione:

$$q_{\text{sup}} = c_v \cdot (T_3 - T_2)$$

dalla quale si ricava:

$$T_3 = \frac{q_{\text{sup}}}{c_v} + T_2$$

In base ai dati numerici di cui siamo a conoscenza otteniamo:

$$T_3 = \frac{2 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}}{716,5 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}} + 736,36 \text{ K} \approx 3527,71 \text{ K}$$

dove si è assunto:

$$c_{v \text{ aria}} = 716,5 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

La trasformazione termodinamica 2-3, in quanto isocora, ammette anche le seguenti relazioni:

$$v_2 = v_3 = 0,083 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

e:

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{T_3}{T_2}$$

Da quest'ultima relazione si ricava:

$$\rho_3 = \rho_2 \cdot \frac{T_3}{T_2}$$

Se si sostituiscono alle lettere i relativi valori numerici si ottiene:

$$\rho_3 = 2,55 \text{ MPa} \cdot \frac{3527,71 \text{ K}}{736,36 \text{ K}} \approx 12,2 \text{ MPa}$$

La successiva trasformazione (3-4) è un'espansione adiabatca. Valgono pertanto le espressioni:

$$T_4 = T_3 \cdot \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{k-1}$$

e:

$$\rho_4 = \rho_3 \cdot \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^k$$

Dal momento che la trasformazione 4-1 è un'isocora e che di conseguenza è:

$$V_4 = V_1 \approx 0,83 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

si ha:

$$T_4 = 3527,71 \text{ K} \cdot \left(\frac{0,083 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}}{0,83 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}} \right)^{1,4-1} \approx 1404,41 \text{ K}$$

$$\rho_4 = 12,2 \text{ MPa} \cdot \left(\frac{0,083 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}}{0,83 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}} \right)^{1,4} \approx 0,49 \text{ MPa}$$

Si perviene agli stessi risultati se si osserva che il rapporto $\frac{V_3}{V_4}$, dato che è: $V_3 = V_2$ e $V_4 = V_1$, è uguale al rapporto $\frac{V_2}{V_1}$, cioè a:

$$\frac{1}{\rho_{\text{compr}}} \left(= \frac{1}{10} \right)$$

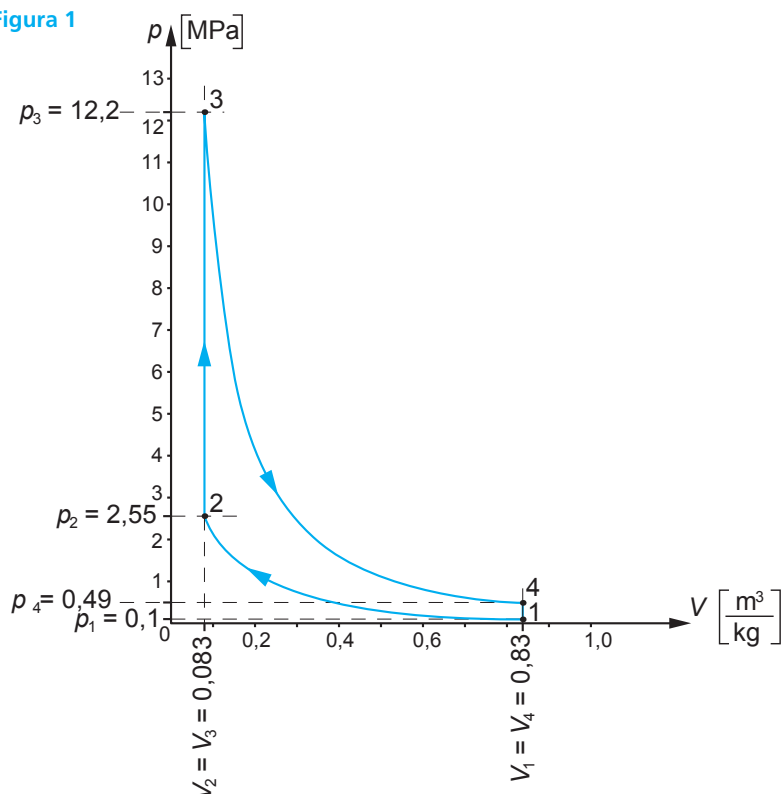
Si ottiene infatti:

$$T_4 = T_3 \cdot \left(\frac{1}{\rho_{\text{compr}}} \right)^{(k-1)} = 3527,71 \text{ K} \cdot \left(\frac{1}{10} \right)^{(1,4-1)} \approx 1404,41 \text{ K}$$

$$\rho_4 = \rho_3 \cdot \left(\frac{1}{\rho_{\text{compr}}} \right)^k = 12,2 \text{ MPa} \cdot \left(\frac{1}{10} \right)^{1,4} \approx 0,49 \text{ MPa}$$

Il ciclo Otto che si è ricavato è quello riportato nella **Figura 1**.

Figura 1



C Esercizio 2



Di un ciclo Diesel (Figura 2.28) avente rapporto volumetrico di compressione $\rho_{\text{compr}} = 20$ calcolare i valori del volume massico, della temperatura e della pressione in corrispondenza dei punti finali di ciascuna delle trasformazioni termodinamiche di cui si compone il ciclo stesso. Si è a conoscenza che all'inizio della compressione adiabatica la pressione p_1 è quella atmosferica e la temperatura T_1 è pari a 20 °C e che nel corso della trasformazione a pressione costante viene fornita al fluido, che secondo la nostra ipotesi è aria, una quantità di calore q_{sup} pari a 2 MJ/kg. Tracciare inoltre sul piano di Clapeyron (p , V) il ciclo stesso sulla base dei risultati ottenuti e calcolarne il rendimento.

SOLUZIONE

All'inizio della compressione adiabatica si ha:

$$p_1 = 101\,325 \text{ Pa}$$

$$T_1 = (273,15 + 20) \text{ K} = 293,15 \text{ K}$$

Dall'equazione di stato dei gas perfetti, analogamente a quanto si è calcolato nell'esercizio precedente, si ottiene:

$$v_1 = \frac{R_{\text{aria}} \cdot T_1}{p_1} = \frac{287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 293,15 \text{ K}}{101\,325 \text{ Pa}} \approx 0,83 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

dove si è posto:

$$R_{\text{aria}} = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

La temperatura T_2 di fine compressione adiabatica si ricava dalla relazione, valida per le trasformazioni adiabatiche:

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{k-1}$$

In base al rapporto volumetrico di compressione p_{compr} che, per definizione, vale:

$$p_{\text{compr}} = \frac{v_1}{v_2}$$

l'espressione di T_2 diviene:

$$T_2 = T_1 \cdot p_{\text{compr}}^{k-1} = 293,15 \text{ K} \cdot 20^{(1,4-1)} \approx 971,63 \text{ K}$$

Il volume massico v_2 è ottenibile dalla stessa definizione di p_{compr} e vale:

$$v_2 = \frac{v_1}{p_{\text{compr}}} = \frac{0,83 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}}{20} \approx 0,0415 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

Dall'equazione di stato dei gas perfetti, infine, si ricava la pressione p_2 , che vale:

$$p_2 = \frac{R_{\text{aria}} \cdot T_2}{v_2} = \frac{287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 971,63 \text{ K}}{0,0415 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}} \approx 6719465 \text{ Pa} \approx 6,72 \text{ MPa}$$

La temperatura finale della trasformazione successiva, l'isobara 2-3, è determinabile tramite la relazione:

$$q_{\text{sup}} = c_p \cdot (T_3 - T_2)$$

dalla quale si ricava:

$$T_3 = \frac{q_{\text{sup}}}{c_p} + T_2 = \frac{2 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}}{1003,5 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}} + 971,63 \text{ K} \approx 2964,65 \text{ K}$$

in quanto si è assunto:

$$c_{p \text{ aria}} = 1003,5 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

La trasformazione termodinamica 2-3, in quanto isobarica, ammette anche le seguenti relazioni:

$$p_2 = p_3 = 6,72 \text{ MPa}$$

e: $\frac{v_3}{v_2} = \frac{T_3}{T_2}$; da quest'ultima relazione si ricava:

$$v_3 = v_2 \cdot \frac{T_3}{T_2} = 0,0415 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \cdot \frac{2964,65 \text{ K}}{971,63 \text{ K}} \approx 0,127 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

La relazione precedente consente di calcolare il rapporto volumetrico di combustione a pressione costante σ , che vale:

$$\sigma = \frac{v_3}{v_2} = \frac{0,127 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}}{0,0415 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}} \approx 3,06$$

La trasformazione successiva (3-4) è un'espansione adiabatca, per la quale valgono le espressioni:

$$T_4 = T_3 \cdot \left(\frac{v_3}{v_4} \right)^{k-1}$$

e

$$p_4 = p_3 \cdot \left(\frac{v_3}{v_4} \right)^k$$

Dato che la trasformazione 4-1 è un'isocora e che di conseguenza è:

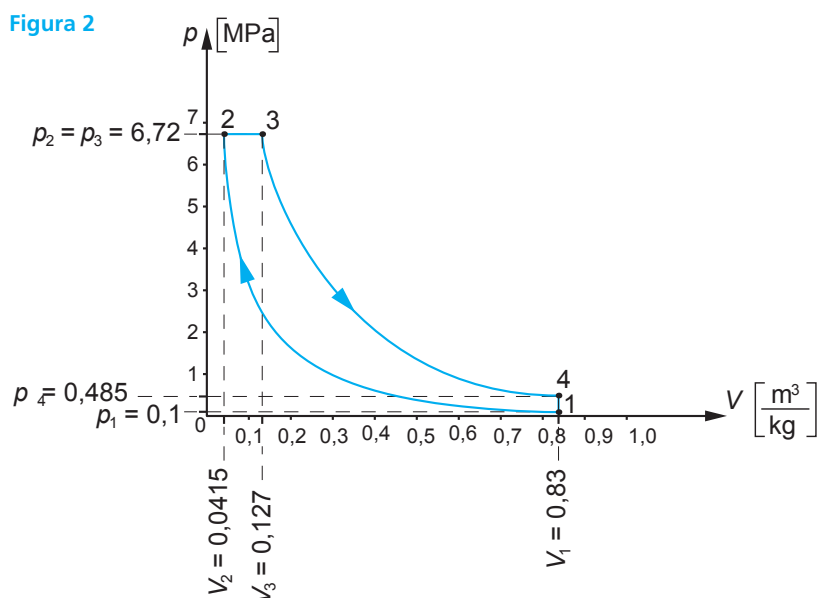
$$v_4 = v_1 = 0,83 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

si ha:

$$T_4 = 2964,65 \text{ K} \cdot \left(\frac{0,127 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}}{0,83 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}} \right)^{1,4-1} \approx 1399,15 \text{ K}$$

$$p_4 = 6,72 \text{ MPa} \cdot \left(\frac{0,127 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}}{0,83 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}} \right)^{1,4} \approx 0,485 \text{ MPa}$$

Il ciclo Diesel che si è ricavato è quello riportato nella **Figura 2**.



Per quanto riguarda il rendimento del ciclo, dalla relazione (14) si ricava:

$$\eta_{\text{Diesel}} = 1 - \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\rho_{\text{compr}}^{k-1}} \cdot \frac{\sigma^k - 1}{\sigma - 1} = 1 - \frac{1}{1,4} \cdot \frac{1}{20^{(1,4-1)}} \cdot \frac{3,06^{1,4} - 1}{3,06 - 1} \approx 0,6 \approx 60\%$$

con:

$$k_{\text{aria}} = \frac{c_p}{c_v} = 1,4$$

Nota bene

Il rendimento di questo ciclo Diesel è identico a quello del ciclo Otto dell'esercizio precedente, nonostante un rapporto volumetrico di compressione doppio di quello del ciclo Otto, a parità di condizioni iniziali di pressione e temperatura.