

# **APPENDICE 1**

## **MOTI OSCILLATORI; OSCILLAZIONI FLESSIONALI**



## 1.1 Moti oscillatori

### 1.1.1 Generalità

Definiamo *moto oscillatorio* (o *vibatorio*) il moto periodico di un corpo che si muove alternativamente tra due posizioni estreme; ad esempio, il moto del pendolo di un orologio a pendolo.

A causa delle dissipazioni di energia dovute alle forze d'attrito, la distanza tra le posizioni estreme può anche non essere costante e diminuire gradualmente nel tempo; in questo caso i moti oscillatori sono detti *smorzati*. Se si vuole mantenere inalterata l'ampiezza delle oscillazioni, occorre compensare l'energia dissipata per attrito con un contributo di energia di entità pari a quella perduta. Nell'orologio a pendolo, ad esempio, l'energia necessaria a mantenere inalterato il moto del pendolo può essere fornita da una molla precaricata, da elettromagneti ecc.

Se invece è necessario contrastare le oscillazioni, si adottano appositi sistemi di *smorzamento*, come ad esempio gli ammortizzatori nelle sospensioni degli autoveicoli.

Se non si tiene conto delle resistenze passive, si può dimostrare che i movimenti oscillatori periodici di un corpo hanno caratteristiche analoghe a quelle dei moti armonici e pertanto sono regolati dalle stesse leggi.

Tra i parametri caratteristici di un moto oscillatorio periodico figurano perciò:

- *periodo*  $T$  = intervallo di tempo necessario per compiere un'*oscillazione completa*; per *oscillazione completa* si intende un'oscillazione al termine della quale il corpo è ritornato nella condizione iniziale, quindi ha completato un *ciclo*. Si misura in secondi/ciclo [s];
- *frequenza*  $f$  = numero di oscillazioni complete verificatesi nell'unità di tempo; si misura in hertz [Hz], cioè in cicli/secondo [ $s^{-1}$ ]. È l'inverso del periodo; risulta cioè:

$$f = \frac{1}{T}$$

La pulsazione del moto armonico è espressa dalla formula:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

Il periodo  $T$  vale perciò:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$$

Se indichiamo con  $\omega$  la *pulsazione dell'oscillazione*, che corrisponde alla pulsazione di un moto armonico avente lo stesso periodo, il periodo  $T$  dell'oscillazione, analogamente a quanto s'è detto per i moti armonici, vale:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$$

Dato che è:

$$f = \frac{1}{T}$$

si ottiene:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{2 \cdot \pi}{\omega}} = \frac{\omega}{2 \cdot \pi}$$

da cui:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

La pulsazione dell'oscillazione è espressa in rad/s [s<sup>-1</sup>].

Oscillazioni libere o naturali

Le oscillazioni effettuate da un corpo allontanato dalla posizione di equilibrio e lasciato libero di oscillare sono dette *libere* o *naturali*.

Si hanno *oscillazioni libere*, ad esempio, quando una forza perturbatrice *F* allontana dalla sua posizione di equilibrio (posizione 1 di **Figura 1**) una massa *m* sospesa verticalmente tra due molle. Raggiunta la posizione estrema (posizione 2), il sistema ha acquisito una certa quantità di energia potenziale elastica pari al lavoro di deformazione compiuto sulle due molle dalla forza perturbatrice. Al cessare improvviso dell'azione di questa forza il sistema tende a riprendere la posizione di equilibrio. Nel moto di ritorno l'energia potenziale elastica che esso possiede si trasforma gradualmente in energia cinetica.

Quando il sistema raggiunge nuovamente la posizione 1, l'energia potenziale elastica è ridotta a zero mentre l'energia cinetica ha acquisito il valore massimo. Di conseguenza la massa *m*, che ha raggiunto la massima velocità, supera la posizione 1 e, nell'ipotesi di assenza di resistenze passive, va a occupare la posizione estrema 3, simmetrica della 2 rispetto alla posizione iniziale 1. La sua energia cinetica si trasforma di nuovo in energia potenziale elastica; la massa inverte il senso dello spostamento e il fenomeno si ripete, teoricamente, in continuazione.

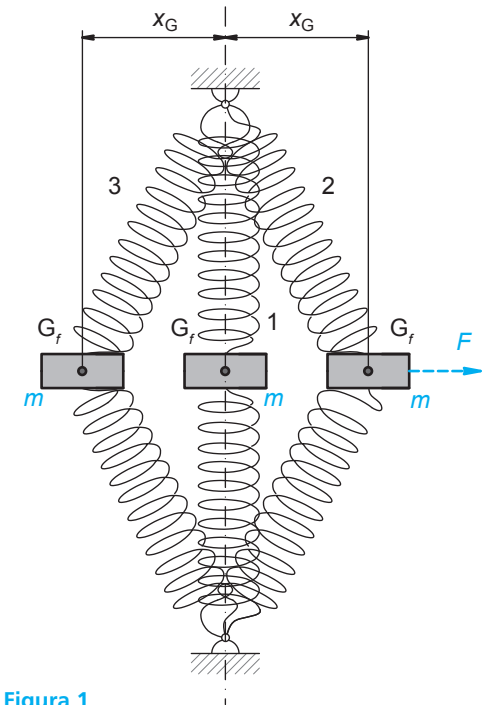


Figura 1

Approfondimento

Dimostrazione dell'analogia tra il moto oscillatorio e il moto armonico

Nel primo volume di questo Corso abbiamo visto che, detto P un punto che si muove con moto uniforme su una circonferenza di raggio *r* e centro O (**Figura 2**), il moto armonico è il moto di un punto come P', proiezione di P su un diametro di tale circonferenza. In un moto armonico:

– la distanza *s'* = OP' percorsa dal punto P' a partire dal centro O della circonferenza è espressa dalla relazione:

$$s' = r \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

– l'accelerazione *a'* di P' vale:

$$a' = a \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

dove:

*a* = accelerazione centripeta del punto P;  
*α* = angolo descritto dal raggio OP = *r*.

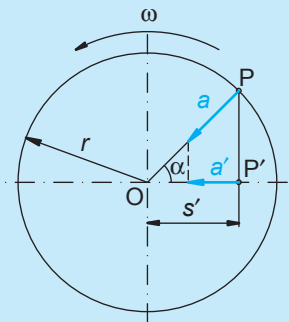


Figura 2

Dato che è:

$$a = \omega^2 \cdot r \quad (3)$$

se si sostituisce la (3) nella (2) si ottiene:

$$a' = \omega^2 \cdot r \cdot \cos \alpha \quad (4)$$

Se si sostituisce la (1) nella (4) risulta:

$$a' = \omega^2 \cdot s' \quad (5)$$

Dato che per ipotesi è  $\omega = \text{cost.}$ , si conclude che l'accelerazione  $a'$  di un punto  $P'$  che si muove di moto armonico è proporzionale allo spostamento  $s' = OP'$  del punto  $P'$  dalla posizione iniziale. Viceversa si può affermare che il moto di un punto la cui accelerazione è proporzionale allo spostamento non può che essere un moto armonico in quanto quest'ultimo è l'unico tipo di moto avente tale proprietà.

Con riferimento all'esempio precedente di oscillazione libera (Figura 3), indichiamo con

$$x_G = G_1G_2$$

lo spostamento del baricentro  $G$  della massa  $m$  dalla posizione 1 alla posizione 2.

Nella configurazione 2 la reazione elastica  $F_{el}$  del sistema vale:

$$F_{el} = k_r \cdot x_G \quad (6)$$

dove con  $k_r$  si è indicata la rigidità del sistema.

La forza d'inerzia  $F_{in}$  cui è soggetta la massa  $m$  nel suo moto di ritorno vale:

$$F_{in} = m \cdot a_G \quad (7)$$

dove  $a_G$  è l'accelerazione del baricentro  $G$ .

La condizione di equilibrio dinamico del sistema nella configurazione 2 richiede l'uguaglianza, istante per istante, tra la reazione elastica  $F_{el}$  e la forza d'inerzia  $F_{in}$  ovvero:

$$F_{el} = F_{in}$$

per cui, dalla (6) e dalla (7), si ha:

$$k_r \cdot x_G = m \cdot a_G \quad (8)$$

Se nella (8) si isola  $a_G$ , si ottiene:

$$a_G = \frac{k_r}{m} \cdot x_G \quad (9)$$

Dato che, per ipotesi, sia  $k_r$  sia  $m$  sono costanti, dalla (9) si deduce che l'accelerazione  $a_G$  del baricentro  $G$  in moto oscillatorio è proporzionale all'elongazione  $x_G$ , cioè allo spostamento  $G_1G_2$  del baricentro stesso. Dunque, il moto oscillatorio del baricentro  $G$ , e quindi della massa  $m$ , non può che essere un moto armonico.

In sintesi: in un moto armonico l'accelerazione  $a'$  risulta proporzionale allo spostamento  $s'$ ; lo stesso accade nel moto oscillatorio di  $G$ , in cui l'accelerazione  $a_G$  risulta proporzionale allo spostamento  $x_G$ . Dunque il moto oscillatorio è analogo al moto armonico.

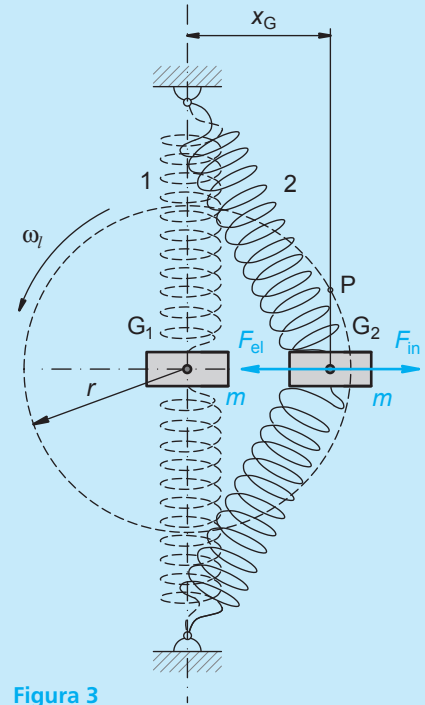


Figura 3

In assenza di smorzamenti, la *pulsazione libera*  $\omega_l$ , caratterizzante un'oscillazione libera, è esprimibile con la relazione:

$$\omega_l = \sqrt{\frac{k_r}{m}} \quad (10)$$

dove:

$k_r$  = rigidità del sistema oscillante di massa  $m$ .

### Approfondimento

Dimostrazione della formula:  $\omega_l = \sqrt{\frac{k_r}{m}}$

Dall'espressione (5) dell'accelerazione  $a'$  di un punto  $P'$  che si muove con moto armonico:

$$a' = \omega^2 \cdot s'$$

se si isola  $\omega$ , pulsazione del moto armonico, si ricava:

$$\omega = \sqrt{\frac{a'}{s'}} \quad (11)$$

Dato che il moto oscillatorio periodico di una massa  $m$  ha le caratteristiche di un moto armonico, ne segue anche le stesse leggi, per cui nella (11) possiamo sostituire:

- alla pulsazione  $\omega$  del moto armonico, la pulsazione libera  $\omega_l$  dell'oscillazione;
- all'accelerazione  $a'$  di un punto che si muove con moto armonico, l'accelerazione  $a_G$  del baricentro  $G$  della massa  $m$  in moto oscillatorio;
- a  $s'$ , distanza percorsa dal punto che si muove con moto armonico, l'elongazione  $x_G = G_1G_2$ , cioè lo spostamento del baricentro  $G$  dalla posizione iniziale 1 alla posizione estrema 2. Nel nostro caso,  $x_G$  rappresenta la deformazione elastica (*freccia*) prodotta sul sistema dalla forza perturbatrice  $F$ .

Dunque, in sostituzione dell'espressione:

$$\omega = \sqrt{\frac{a'}{s'}}$$

possiamo scrivere l'espressione:

$$\omega_l = \sqrt{\frac{a_G}{x_G}} \quad (12)$$

Se nella (12) moltiplichiamo per  $m$  numeratore e denominatore della frazione sotto radice quadrata, ricaviamo l'espressione:

$$\omega_l = \sqrt{\frac{m \cdot a_G}{m \cdot x_G}}$$

che possiamo scrivere:

$$\omega_l = \sqrt{\frac{F}{m \cdot x_G}} = \sqrt{\frac{1}{m} \cdot \frac{F}{x_G}} \quad (13)$$

dato che la condizione di equilibrio dinamico nella posizione 2 impone l'uguaglianza, istante per istante:

$$F_{el} = F_{in} = m \cdot a_G = F$$

L'espressione:

$$\frac{F}{x_G}$$

che compare nella (13) rappresenta la rigidezza  $k_r$  del sistema oscillante. Perciò la (13) può anche scriversi:

$$\omega_l = \sqrt{\frac{k_r}{m}} \quad (10)$$

### Oscillazioni forzate e risonanza

Le oscillazioni provocate su un corpo da una forza esterna periodica sono chiamate *oscillazioni forzate*. La loro frequenza è quella della forza esterna ed è normalmente diversa dalla frequenza *naturale* del corpo. Di conseguenza, la loro pulsazione è normalmente diversa dalla pulsazione *naturale* o *propria* del corpo.

Se esiste uno smorzamento del sistema, cioè se si hanno *oscillazioni smorzate*, l'ampiezza dell'oscillazione forzata del sistema raggiunge un massimo in corrispondenza di un unico valore della pulsazione esterna. Se si presenta questo caso si parla di *risonanza*.

Si dice che un sistema è *in condizioni di risonanza* quando la frequenza della forza esterna è molto vicina alla frequenza naturale del sistema; ovvero, se si prendono in considerazione le pulsazioni, quando la pulsazione della forza esterna è prossima alla pulsazione naturale del sistema. Più lo smorzamento del sistema è limitato, più la *frequenza di risonanza* tende ad avvicinarsi alla frequenza propria del sistema, praticamente fino a non differenziarsi più da questa. Se si perviene alla condizione di risonanza, l'ampiezza dell'oscillazione, come s'è detto, cresce fino a raggiungere il valore massimo. Se questa situazione persiste nel tempo, la resistenza della struttura può essere compromessa anche molto seriamente.

Per evitare il verificarsi delle condizioni di risonanza si cerca di aumentare il valore della *frequenza propria* del sistema fino a portarlo fuori dal campo di frequenze utilizzate usualmente nel funzionamento della macchina. Per ottenere ciò, in base all'espressione (10) si interviene sul sistema con un aumento della rigidezza  $k_r$  e/o una diminuzione della massa  $m$ .

### Oscillazioni flessionali e torsionali degli alberi

Le oscillazioni che si producono su un albero possono essere *flessionali* e *torsionali*:

- le **oscillazioni flessionali** sono causate dalla non perfetta coassialità delle masse che costituiscono il sistema rotante: la loro eccentricità provoca la nascita di forze centrifughe che producono inflessioni aventi direzioni continuamente variabili;
- le **oscillazioni torsionali** sono dovute a variazioni periodiche dei momenti torcenti trasmessi all'albero.

In questa Appendice ci occupiamo delle sole oscillazioni flessionali. Le oscillazioni torsionali sono trattate separatamente nell'Appendice 2 ad esse dedicata.

## 1.2 Oscillazioni flessionali

Consideriamo un albero di massa trascurabile, rotante con velocità angolare  $\omega$ , appoggiato alle estremità e sul quale è calettato eccentricamente nella sezione di mezzeria un volano di massa  $m$  (Figura 4).

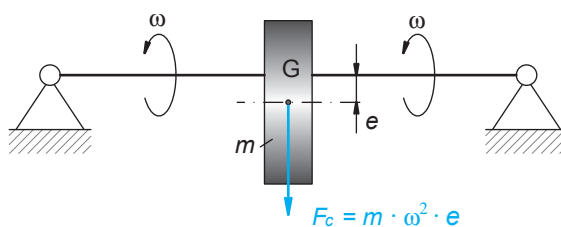


Figura 4

All'inizio della rotazione l'eccentricità  $e$  del volano produce una forza centrifuga  $F_c$  che vale:

$$F_c = m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot \omega^2 \cdot e$$

in quanto inizialmente è:  $r = e$ .

Questa forza opera come causa perturbatrice e inflette l'albero. Indichiamo con  $y$  la freccia d'inflessione generata dalla forza  $F_c$ ; la forza centrifuga cresce al crescere di  $y$  e assume il valore:

$$F_c = m \cdot \omega^2 \cdot r' = m \cdot \omega^2 \cdot (y + e)$$

in quanto ora è:  $r' = (y + e)$ .

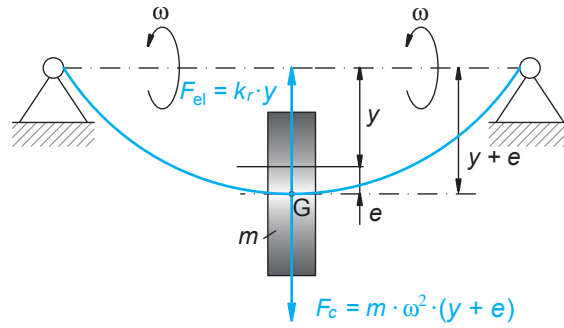
Se indichiamo con:

$$-F_{el} = \text{reazione elastica dell'albero} = k_r \cdot y$$

dove:  $k_r$  = rigidezza dell'albero, si ha equilibrio dinamico quando, nel corso della rotazione, la forza centrifuga  $F_c$  (Figura 5) uguaglia la reazione elastica  $F_{el}$  dell'albero, ovvero quando è verificata la condizione:

$$m \cdot \omega^2 \cdot (y + e) = k_r \cdot y \quad (14)$$

Figura 5



Se si risolve la (14) rispetto a  $y$  si ottiene:

$$m \cdot \omega^2 \cdot y + m \cdot \omega^2 \cdot e = k_r \cdot y \rightarrow y \cdot (k_r - m \cdot \omega^2) = m \cdot \omega^2 \cdot e$$

da cui:

$$y = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot e}{k_r - m \cdot \omega^2} = \frac{\omega^2 \cdot e}{\frac{k_r}{m} - \omega^2} \quad (15)$$

Se nell'espressione (10) della pulsazione propria  $\omega_l$  del sistema:

$$\omega_l = \sqrt{\frac{k_r}{m}}$$

si elevano al quadrato entrambi i membri, si ottiene:

$$\omega_l^2 = \frac{k_r}{m}$$

Se si sostituisce quest'ultima espressione nella (15) si ricava:

$$y = \frac{\omega^2 \cdot e}{\omega_l^2 - \omega^2} = \frac{e}{\left(\frac{\omega_l}{\omega}\right)^2 - 1} \quad (16)$$

Dalle espressioni (16) possiamo trarre le seguenti conclusioni:

– la freccia  $y$  dell'albero è tanto più grande quanto più piccola è la differenza tra  $\omega_l$  e  $\omega$ ;

– per:  $\omega \rightarrow \omega_l \quad (17)$



cioè, quanto più il regime di rotazione  $\omega$  dell'albero si approssima alla pulsazione  $\omega_l$  delle oscillazioni libere, tanto più la freccia  $y$  aumenta fino a diventare, al limite, teoricamente infinita. In questa situazione l'albero è in *condizioni di risonanza*, situazione che, come s'è detto, è da evitare il più possibile per non compromettere la resistenza della struttura.

In queste condizioni l'albero ruota alla *velocità critica*  $\omega_{\text{crit}}$  (*velocità critica flessionale*); questa velocità è espressa, in base alle relazioni (10) e (17), dalla relazione:

$$\omega = \omega_l = \omega_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{k_r}{m}} \quad (18)$$

### Approfondimento

#### Velocità supercritiche; autocentramento

Per:  $\omega > \omega_l$  si entra nel campo delle *velocità supercritiche*. Se la velocità  $\omega$  di regime tende all'infinito, dalla (16) si ricava che la freccia  $y$  tende al valore  $-e$ . Ciò significa che il baricentro G del volano tende ad *autocentrarsi*, cioè a collocarsi sulla retta che collega tra di loro i centri dei cuscinetti posti alle estremità dell'albero (Figura 6).

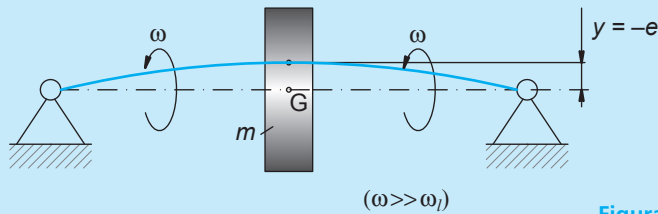


Figura 6

### 1.2.1 Determinazione delle velocità critiche flessionali degli alberi

Consideriamo un albero su cui è calettato un volano di massa  $m$ . Formuliamo l'ipotesi secondo la quale, quando l'albero è posto in rotazione, il volano, nel suo spostamento, si mantiene perpendicolare all'asse indeformato, cioè rettilineo, dell'albero. Possiamo estendere questa ipotesi anche al caso di un albero soggetto unicamente al peso proprio.

Sulla base di queste ipotesi, negli esempi che seguono sono stati eseguiti i calcoli della *velocità critica flessionale*  $\omega_{\text{crit}}$  di alberi variamente caricati; i risultati ottenuti sono ordinati in un'apposita tabella (Tabella 1). I calcoli sono stati effettuati con la seguente procedura:

- annotazione delle espressioni delle frecce  $y$  in funzione delle tipologie di carico prescelte, dal "Prospetto riassuntivo dei parametri di deformazione più comuni" dell'UDA 8 del secondo volume di questo Corso;
- per ciascuna tipologia di carico prescelta:
  - calcolo della costante elastica flessionale, ovvero della rigidezza  $k_r$ , mediante la relazione:

$$k_r = \frac{F_c}{y}$$

- determinazione della velocità critica flessionale  $\omega_{\text{crit}}$  in base alla formula:

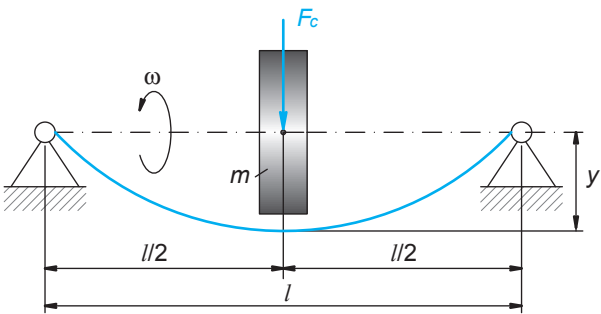
$$\omega_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{k_r}{m}}$$

Esempi

Esempio 1

Albero di massa trascurabile, lunghezza  $l$ , appoggiato alle due estremità e caricato in mezzeria dalla forza  $F_c$  (Figura 7).

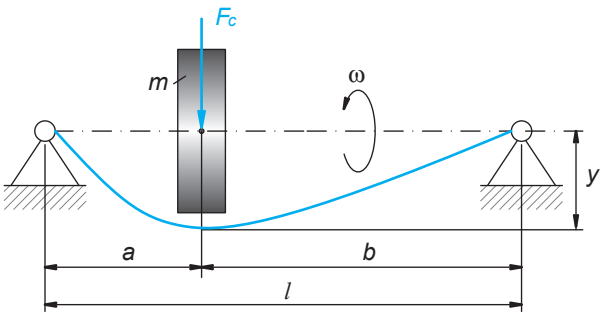
Figura 7



Esempio 2

Albero di massa trascurabile, lunghezza  $l$ , appoggiato alle due estremità e caricato dalla forza  $F_c$  su una sezione posta alle distanze  $a$  e  $b$  dalle estremità (Figura 8).

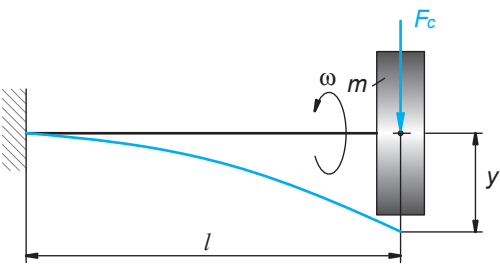
Figura 8



Esempio 3

Albero di massa trascurabile, lunghezza  $l$ , incastrato a una estremità e caricato dalla forza  $F_c$  sull'estremità libera (Figura 9).

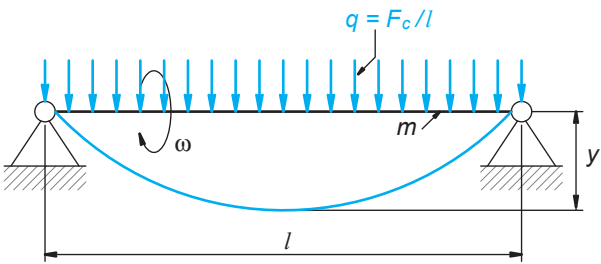
Figura 9



Esempio 4

Albero di lunghezza  $l$ , appoggiato alle estremità e caricato dalla forza  $q$  distribuita uniformemente su tutta la lunghezza  $l$ , con  $q = \frac{F_c}{l}$  (Figura 10). Questo caso può anche essere assimilato a quello di un albero rotante soggetto unicamente all'azione della massa propria  $m$ .

Figura 10



**Tabella 1**  
Calcoli della velocità critica flessionale di alberi variamente caricati come da esempi.

	Freccia $y$	Rigidezza $k_r$	Velocità critica flessionale $\omega_{crit}$
Es. 1	$\frac{F_c \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I_n}$	$\frac{48 \cdot E \cdot I_n}{l^3}$	$\sqrt{\frac{48 \cdot E \cdot I_n}{m \cdot l^3}}$
Es. 2	$\frac{F_c \cdot a^2 \cdot b^2}{3 \cdot E \cdot I_n \cdot l}$	$\frac{3 \cdot E \cdot I_n \cdot l}{a^2 \cdot b^2}$	$\sqrt{\frac{3 \cdot E \cdot I_n \cdot l}{m \cdot a^2 \cdot b^2}}$
Es. 3	$\frac{F_c \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_n}$	$\frac{3 \cdot E \cdot I_n}{l^3}$	$\sqrt{\frac{3 \cdot E \cdot I_n}{m \cdot l^3}}$
Es. 4	$\frac{5 \cdot F_c \cdot l^3}{384 \cdot E \cdot I_n}$	$\frac{384 \cdot E \cdot I_n}{5 \cdot l^3}$	$\sqrt{\frac{384 \cdot E \cdot I_n}{5 \cdot m \cdot l^3}}$

1.2.2 La formula di Dunkerley

Finora è stata determinata la velocità critica flessionale di alberi portanti un solo volano o soggetti alla sola azione della massa propria. In questi casi la velocità critica è una sola.

Se sull'albero sono calettati più volani, esso è soggetto a tante velocità critiche quanti sono i volani calettati. Tuttavia, il calcolo delle velocità critiche successive alla prima viene effettuato solo raramente, perché in genere solo la prima velocità critica rientra nel settore delle frequenze comunemente utilizzate nelle applicazioni industriali.

Le velocità successive sono notevolmente più elevate, al punto da non influenzare il funzionamento della macchina in quanto il suo regime di rotazione si mantiene a livelli decisamente minori. Fanno eccezione i turboventilatori, i compressori assiali e in genere le turbomacchine; per queste macchine, data la loro elevata velocità di rotazione, si rende necessario il calcolo anche delle velocità critiche successive alla prima.

Il calcolo della prima velocità critica di alberi sui quali sono calettati più volani viene realizzato con metodi approssimati. Con uno di questi metodi si perviene alla seguente formula (*formula di Dunkerley*), nella quale si trascura la massa dell'albero:

$$\frac{1}{\omega_{crit}^2} = \frac{1}{\omega_{crit(1)}^2} + \frac{1}{\omega_{crit(2)}^2} + \frac{1}{\omega_{crit(3)}^2} + \dots + \frac{1}{\omega_{crit(n)}^2} \quad (19)$$

dove:

$\omega_{crit}$  = velocità angolare critica flessionale del sistema comprendente le  $n$  masse calettate sull'albero;  
 $\omega_{crit(1)}$ ,  $\omega_{crit(2)}$ ,  $\omega_{crit(3)}$ ,  $\omega_{crit(n)}$  = velocità angolari critiche dell'albero, considerato caricato separatamente da ciascuna delle masse (1), (2), (3), ..., (n).

Se nella (19) si esplicita  $\omega_{crit}$  si ricava:

$$\omega_{crit} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\omega_{crit(1)}^2} + \frac{1}{\omega_{crit(2)}^2} + \frac{1}{\omega_{crit(3)}^2} + \dots + \frac{1}{\omega_{crit(n)}^2}}}$$

Se invece si ritiene necessario prendere in considerazione anche la massa dell'albero, la (19) diventa:

$$\frac{1}{\omega_{\text{crit}}^2} = \frac{1}{\omega_{\text{crit}(0)}^2} + \frac{1}{\omega_{\text{crit}(1)}^2} + \frac{1}{\omega_{\text{crit}(2)}^2} + \frac{1}{\omega_{\text{crit}(3)}^2} + \dots + \frac{1}{\omega_{\text{crit}(n)}^2} \quad (20)$$

dove con  $\omega_{\text{crit}(0)}$  si è indicata la velocità angolare critica relativa all'albero scarico.

Analogamente a quanto s'è detto precedentemente, se nella (20) si esplicita  $\omega_{\text{crit}}$  si ricava:

$$\omega_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\omega_{\text{crit}(0)}^2} + \frac{1}{\omega_{\text{crit}(1)}^2} + \frac{1}{\omega_{\text{crit}(2)}^2} + \frac{1}{\omega_{\text{crit}(3)}^2} + \dots + \frac{1}{\omega_{\text{crit}(n)}^2}}}$$

### Approfondimento

Dimostrazione delle formule:

$$\frac{1}{\omega_{\text{crit}}^2} = \frac{1}{\omega_{\text{crit}(1)}^2} + \frac{1}{\omega_{\text{crit}(2)}^2} + \frac{1}{\omega_{\text{crit}(3)}^2} + \dots + \frac{1}{\omega_{\text{crit}(n)}^2}$$

$$\omega_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\omega_{\text{crit}(1)}^2} + \frac{1}{\omega_{\text{crit}(2)}^2} + \frac{1}{\omega_{\text{crit}(3)}^2} + \dots + \frac{1}{\omega_{\text{crit}(n)}^2}}}$$

Consideriamo un albero di massa trascurabile, rotante con velocità  $\omega$ , appoggiato alle estremità, sul quale sono calettati  $n$  volani di masse rispettivamente  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ . I volani sono per ipotesi perfettamente centrati sull'albero.

### Nota bene

Anche se i volani sono per ipotesi perfettamente centrati sull'albero, è sufficiente l'intervento di una forza laterale esterna, anche di lieve entità, per modificare l'equilibrio del sistema e provocare l'inflessione dell'albero.

La freccia  $y$  che ne consegue è infatti all'origine di una forza centrifuga:

$$F_c = m \cdot \omega^2 \cdot y$$

che viene equilibrata dalla reazione elastica del sistema:

$$F_{\text{el}} = k_r \cdot y$$

Finché risulta:

$$F_{\text{el}} > F_c$$

l'albero mantiene una configurazione rettilinea. Ciò avviene se è:

$$k_r \cdot y > m \cdot \omega^2 \cdot y$$

ovvero:

$$k_r > m \cdot \omega^2 \rightarrow \omega < \sqrt{\frac{k_r}{m}}$$

Dato che è:

$$\omega_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{k_r}{m}}$$

l'albero mantiene una configurazione rettilinea finché risulta:

$$\omega < \omega_{\text{crit}}$$

cioè finché il regime di rotazione dell'albero si mantiene inferiore alla velocità critica.

Se risulta:

$$F_{\text{el}} = F_c \rightarrow \omega = \omega_{\text{crit}}$$

si verifica la risonanza.

Perciò, anche nel caso di alberi con masse volaniche perfettamente centrate si possono presentare ugualmente le condizioni di risonanza.

La velocità angolare critica  $\omega_{\text{crit}(1)}$  dell'albero nell'ipotesi del calettamento del solo volano di massa  $m_1$  è:

$$\omega_{\text{crit}(1)} = \sqrt{\frac{k_r}{m_1}}$$

da cui si ricava:

$$m_1 = \frac{k_r}{\omega_{\text{crit}(1)}^2} \quad (21)$$

Analogamente, la velocità angolare critica  $\omega_{\text{crit}(2)}$  dell'albero nell'ipotesi del calettamento del solo volano di massa  $m_2$  è:

$$\omega_{\text{crit}(2)} = \sqrt{\frac{k_r}{m_2}}$$

da cui si ricava:

$$m_2 = \frac{k_r}{\omega_{\text{crit}(2)}^2} \quad (22)$$

E così via. Ripetiamo cioè lo stesso procedimento per ciascuna delle  $n$  masse calettate sull'albero.

Se ipotizziamo la presenza contemporanea di tutte le  $n$  masse, possiamo scrivere:

$$\omega_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{k_r}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}}$$

da cui si ricava:

$$m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n = \frac{k_r}{\omega_{\text{crit}}^2} \quad (23)$$

Se inseriamo relazioni come la (21) e la (22), ricavate per ciascuna delle  $n$  masse, nella (23) otteniamo:

$$\frac{k_r}{\omega_{\text{crit}(1)}^2} + \frac{k_r}{\omega_{\text{crit}(2)}^2} + \frac{k_r}{\omega_{\text{crit}(3)}^2} + \dots + \frac{k_r}{\omega_{\text{crit}(n)}^2} = \frac{k_r}{\omega_{\text{crit}}^2} \quad (24)$$

» segue

da cui, dopo opportune semplificazioni, si ha:

$$\frac{1}{\omega_{crit}^2} = \frac{1}{\omega_{crit(1)}^2} + \frac{1}{\omega_{crit(2)}^2} + \frac{1}{\omega_{crit(3)}^2} + \dots + \frac{1}{\omega_{crit(n)}^2}$$

Se si esplicita  $\omega_{crit}^2$  si ricava:

$$\omega_{crit}^2 = \frac{1}{\frac{1}{\omega_{crit(1)}^2} + \frac{1}{\omega_{crit(2)}^2} + \frac{1}{\omega_{crit(3)}^2} + \dots + \frac{1}{\omega_{crit(n)}^2}}$$

Se si estrae la radice quadrata da entrambi i membri di quest'ultima espressione si ottiene infine:

$$\omega_{crit} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\omega_{crit(1)}^2} + \frac{1}{\omega_{crit(2)}^2} + \frac{1}{\omega_{crit(3)}^2} + \dots + \frac{1}{\omega_{crit(n)}^2}}}$$

## ESERCIZI SVOLTI

### Argomenti:

**A1** Velocità critica flessionale - Albero con massa trascurabile

**A2** Velocità critica flessionale - Formula di Dunkerley

### A1 Esercizio 1

Calcolare la velocità critica di un albero in acciaio, di massa trascurabile, appoggiato alle estremità, sul quale è calettato in mezzzeria un volano avente massa  $m = 100$  kg. L'albero ha diametro  $d = 80$  mm; la distanza  $l$  tra gli appoggi vale 0,9 m.

### SOLUZIONE

Dalla Tabella 1 ricaviamo l'espressione della velocità angolare critica  $\omega_{\text{crit}}$  di un albero nelle condizioni di carico analoghe a quelle enunciate per l'albero in esame, cioè l'espressione:

$$\omega_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{48 \cdot E \cdot I_n}{m \cdot l^3}}$$

Per il calcolo di  $I_n$ , utilizziamo la formula del momento quadratico di superficie  $I_n$  di una sezione circolare:

$$I_n = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$$

si ricava:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{\pi \cdot 80^4 \text{ mm}^4}{64} \approx 2\,010\,619 \text{ mm}^4 \approx 2,01 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 = 2,01 \cdot 10^6 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4 = \\ &= 2,01 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

dato che è:

$$1 \text{ mm}^4 = (10^{-3})^4 \text{ m}^4 = 10^{-12} \text{ m}^4$$

Ipotizziamo come modulo di elasticità normale  $E$  per l'acciaio utilizzato per l'albero:

$$E = 206\,000 \text{ N/mm}^2 = 206 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2 = 206 \cdot 10^3 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 206 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

dato che è:

$$1 \text{ mm}^2 = (10^{-3})^2 \text{ m}^2 = 10^{-6} \text{ m}^2$$

L'espressione della velocità angolare critica  $\omega_{\text{crit}}$ :

$$\omega_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{48 \cdot E \cdot I_n}{m \cdot l^3}}$$

con i valori numerici in nostro possesso diviene:

$$\omega_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{48 \cdot 206 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 2,01 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4}{100 \text{ kg} \cdot 0,9^3 \text{ m}^3}} \approx 522 \text{ rad/s}$$

La velocità critica di rotazione  $n_{\text{crit}}$ , espressa in giri/min, è:

$$n_{\text{crit}} = \frac{60 \cdot \omega_{\text{crit}}}{2 \cdot \pi} = \frac{60 \cdot 522 \text{ rad/s}}{2 \cdot \pi} \approx 4987 \text{ giri/min}$$

## A2 Esercizio 2

Calcolare la velocità critica di un albero in acciaio, appoggiato alle estremità, sul quale è calettato in mezzzeria un volano avente massa  $m_{vol} = 120$  kg. L'albero ha diametro  $d = 80$  mm; la distanza  $l$  tra gli appoggi vale 0,9 m. Si richiede di prendere in considerazione anche l'azione della massa  $m_{alb}$  dell'albero.

## SOLUZIONE

Per calcolare la velocità angolare critica dell'albero secondo le indicazioni del testo dell'esercizio, dobbiamo utilizzare la formula di Dunkerley; consideriamo allora separatamente:

1. la sola azione della massa  $m_{alb}$  dell'albero;
2. la sola azione della massa  $m_{vol}$  del volano;
3. l'azione complessiva della massa  $m_{alb}$  dell'albero e della massa  $m_{vol}$  del volano.

1. La massa  $m_{alb}$  dell'albero viene calcolata in base all'espressione:

$$m_{alb} = \rho \cdot V$$

dove con  $\rho$  si è indicata la massa volumica del materiale di cui è costituito l'albero.

Il volume  $V$  è ricavabile dall'espressione:

$$V = A \cdot l$$

con:  $A$  = area della sezione retta dell'albero  $= \frac{\pi \cdot d^2}{4}$ .

Con i valori numerici in nostro possesso ricaviamo:

$$A = \frac{\pi \cdot 80^2 \text{ mm}^2}{4} \approx 5027 \text{ mm}^2 \approx 5027 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

Di conseguenza è:

$$V = 5027 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot 0,9 \text{ m} \approx 4,52 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Se assumiamo come valore della massa volumica dell'acciaio:

$$\rho = 7,85 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

la massa  $m_{alb}$  dell'albero vale:

$$m_{alb} = 7,85 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 4,52 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \approx 35,5 \text{ kg}$$

L'espressione che utilizziamo nei calcoli è quella della velocità angolare critica  $\omega_{crit alb}$  di un albero del quale si considera solo la massa  $m_{alb}$  (Tabella 1), cioè:

$$\omega_{crit alb} = \sqrt{\frac{384 \cdot E \cdot I_n}{5 \cdot m \cdot l^3}}$$

Per il calcolo di  $I_n$  utilizziamo la formula del momento quadratico di superficie  $I_n$  di una sezione circolare:

$$I_n = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$$

si ricava:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{\pi \cdot 80^4 \text{ mm}^4}{64} \approx 2010619 \text{ mm}^4 \approx 2,01 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 = 2,01 \cdot 10^6 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4 = \\ &= 2,01 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

dato che è:

$$1 \text{ mm}^4 = (10^{-3})^4 \text{ m}^4 = 10^{-12} \text{ m}^4$$



Ipotizziamo come modulo di elasticità normale  $E$  per l'acciaio utilizzato per l'albero:

$$E = 206\,000 \text{ N/mm}^2 = 206 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2 = 206 \cdot 10^3 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 206 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

dato che è:

$$1 \text{ mm}^2 = (10^{-3})^2 \text{ m}^2 = 10^{-6} \text{ m}^2$$

L'espressione della velocità angolare critica  $\omega_{\text{crit alb}}$ :

$$\omega_{\text{crit alb}} = \sqrt{\frac{384 \cdot E \cdot I_n}{5 \cdot m \cdot l^3}}$$

con i valori numerici in nostro possesso diviene:

$$\omega_{\text{crit alb}} = \sqrt{\frac{384 \cdot 206 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 2,01 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4}{5 \cdot 35,5 \text{ kg} \cdot 0,9^3 \text{ m}^3}} \approx 1108 \text{ rad/s}$$

2. Se si considera la sola massa del volano e si trascura la massa dell'albero, l'espressione che usiamo nei calcoli è quella della velocità angolare critica  $\omega_{\text{crit v}}$  di un albero sul quale è calettato in mezzzeria un volano di massa  $m_{\text{vol}}$  (Tabella 1), cioè:

$$\omega_{\text{crit v}} = \sqrt{\frac{48 \cdot E \cdot I_n}{m_{\text{vol}} \cdot l^3}}$$

Con i valori numerici in nostro possesso ricaviamo:

$$\omega_{\text{crit v}} = \sqrt{\frac{48 \cdot 206 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 2,01 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4}{120 \text{ kg} \cdot 0,9^3 \text{ m}^3}} \approx 477 \text{ rad/s}$$

3. Se si considerano sia la massa dell'albero sia quella del volano, per calcolare la velocità angolare critica dell'albero applichiamo la formula di Dunkerley:

$$\frac{1}{\omega_{\text{crit}}^2} = \frac{1}{\omega_{\text{crit alb}}^2} + \frac{1}{\omega_{\text{crit v}}^2}$$

Se nella precedente formula si esplicita  $\omega_{\text{crit}}^2$ , si ricava:

$$\omega_{\text{crit}}^2 = \frac{1}{\frac{1}{\omega_{\text{crit alb}}^2} + \frac{1}{\omega_{\text{crit v}}^2}}$$

Se si estrae la radice quadrata da entrambi i membri si ottiene infine:

$$\omega_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\omega_{\text{crit alb}}^2} + \frac{1}{\omega_{\text{crit v}}^2}}}$$

Con i valori numerici in nostro possesso ricaviamo:

$$\omega_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{1108^2} + \frac{1}{477^2}}} \approx 438 \text{ rad/s}$$

Come si può notare, la massa dell'albero influisce solo limitatamente sul valore complessivo di  $\omega_{\text{crit}}$ .

La velocità critica di rotazione  $n_{\text{crit}}$ , espressa in giri/min, è:

$$n_{\text{crit}} = \frac{60 \cdot \omega_{\text{crit}}}{2 \cdot \pi} = \frac{60 \cdot 438 \text{ rad/s}}{2 \cdot \pi} \approx 4182 \text{ giri/min}$$

## VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO

**Riconoscere se le seguenti affermazioni sono vere (V) o false (F).**

1. Il moto oscillatorio (o vibratorio) è il moto periodico di un corpo che si muove alternativamente tra due posizioni estreme. ☐ V ☐ F
2. Il periodo  $T$  di un moto oscillatorio è l'intervallo di tempo necessario per compiere un'oscillazione in un solo senso. ☐ V ☐ F
3. La freccia  $y$  di un albero di massa trascurabile, rotante con velocità angolare  $\omega$ , semplicemente appoggiato alle estremità e sul quale è calettato eccentricamente nella sezione di mezzeria un volano di massa  $m$  è tanto più grande quanto maggiore è la differenza tra la pulsazione libera  $\omega_l$  e la velocità angolare  $\omega$ . ☐ V ☐ F

# QUESITI

**Individuare la risposta esatta ai seguenti quesiti a risposta multipla.**

1. Se indichiamo con  $\omega$  la pulsazione dell'oscillazione e con  $f$  la frequenza, la relazione che lega tra di loro questi due parametri è:

☐ a  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$

☐ b  $\omega = \pi \cdot f$

☐ c  $\omega = \frac{f}{\pi}$

☐ d  $\omega = \frac{\pi}{f}$

2. La pulsazione libera flessionale  $\omega_l$  è esprimibile con la relazione:

☐ a  $\omega_l = \sqrt{\frac{m}{k_r}}$

☐ c  $\omega_l = \sqrt{\frac{k_r}{2 \cdot \pi}}$

☐ b  $\omega_l = \sqrt{\frac{k_r}{\pi}}$

☐ d  $\omega_l = \sqrt{\frac{k_r}{m}}$

dove:  $k_r$  = rigidezza del sistema oscillante di massa  $m$ .

3. Un albero di massa trascurabile, appoggiato alle estremità e sul quale è calettato con eccentricità e nella sezione di mezzeria un volano, ruota a regime con velocità angolare  $\omega$ . Se  $\omega$  tende all'infinito, la freccia  $y$  tende:

☐ a al valore  $+\infty$

☐ c a  $-\infty$

☐ b al valore  $-\infty$

☐ d a  $+\infty$

4. La formula di Dunkerley, nella quale si trascura la massa dell'albero, è:

☐ a  $\omega_{crit}^2 = \omega_{crit(1)}^2 + \omega_{crit(2)}^2 + \omega_{crit(3)}^2 \dots + \omega_{crit(n)}^2$

☐ b  $\frac{1}{\omega_{crit}} = \frac{1}{\omega_{crit(1)}} + \frac{1}{\omega_{crit(2)}} + \frac{1}{\omega_{crit(3)}} + \dots + \frac{1}{\omega_{crit(n)}}$

☐ c  $\frac{1}{\omega_{crit}^2} = \frac{1}{\omega_{crit(1)}^2} + \frac{1}{\omega_{crit(2)}^2} + \frac{1}{\omega_{crit(3)}^2} + \dots + \frac{1}{\omega_{crit(n)}^2}$

☐ d  $\omega_{crit} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\omega_{crit(1)}^2} + \frac{1}{\omega_{crit(2)}^2} + \frac{1}{\omega_{crit(3)}^2} + \dots + \frac{1}{\omega_{crit(n)}^2}}}$

dove:

$\omega_{crit}$  = velocità angolare critica flessionale del sistema comprendente le  $n$  masse calettate sull'albero;  
 $\omega_{crit(1)}, \omega_{crit(2)}, \omega_{crit(3)}, \dots, \omega_{crit(n)}$  = velocità angolari critiche dell'albero, considerato caricato separatamente da ciascuna delle masse (1), (2), (3), ..., (n).

## ESERCIZI PROPOSTI

### Argomenti:

**A1** Velocità critica flessionale - Albero con massa trascurabile

**A2** Velocità critica flessionale - Formula di Dunkerley

### A1 | Esercizio 1

Un volano avente massa  $m = 80$  kg è calettato nella sezione di mezzeria di un albero in acciaio, di massa trascurabile, appoggiato alle estremità. Il diametro dell'albero è  $d = 65$  mm, la distanza  $l$  tra gli appoggi vale 0,85 m. Calcolare la velocità critica dell'albero.

[ $I_n \approx 0,876 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$  e  $\rho_{\text{acc}} = 7850 \text{ kg/m}^3$ ;  
se si assume come modulo di elasticità normale per l'acciaio utilizzato  
per l'albero  $E = 206\,000 \text{ N/mm}^2 = 206 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ , si ottiene:  
 $\omega_{\text{crit}} \approx 420 \text{ rad/s}$ , corrispondente a una velocità di rotazione critica,  
espressa in giri/min:  $n_{\text{crit}} \approx 4010 \text{ giri/min}$ ]

### A2 | Esercizio 2

Un volano avente massa  $m_{\text{vol}} = 90$  kg è calettato nella sezione di mezzeria di un albero in acciaio, appoggiato alle estremità. L'albero ha diametro  $d = 65$  mm; la distanza  $l$  tra gli appoggi vale 0,75 m. Calcolare la velocità critica dell'albero. Si richiede di prendere in considerazione anche l'azione della massa  $m_{\text{alb}}$  dell'albero.

[ $A \approx 3318,3 \text{ mm}^2 \approx 3318,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ ;  $V \approx 2,49 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ .  
Se assumiamo come valore della massa volumica dell'acciaio:  
 $\rho = 7,85 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ , la massa dell'albero vale:  $m_{\text{alb}} \approx 19,5 \text{ kg}$ ;  
 $I_n \approx 0,876 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$ ; se si assume come modulo di elasticità normale per l'acciaio  
utilizzato per l'albero  $E = 206\,000 \text{ N/mm}^2 = 206 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ , si ottiene:  
 $\omega_{\text{crit alb}} \approx 1297 \text{ rad/s}$ ; si ricava inoltre:  $\omega_{\text{crit v}} \approx 477,7 \text{ rad/s}$ ; con la formula  
di Dunkerley si ottiene infine:  $\omega_{\text{crit}} \approx 448,3 \text{ rad/s}$ , poco dissimile da  $\omega_{\text{crit v}}$ ]

per Reda: per gli  
esercizi con foglio  
elettronico inseriamo  
un QR?

### Esercizio proposto N. 1 con foglio elettronico

Oscillazioni flessionali\_1

### Esercizio proposto N. 2 con foglio elettronico

Oscillazioni flessionali\_2