

APPENDICE 2

OSCILLAZIONI TORSIONALI

2.1 Oscillazioni torsionali libere

2.1.1 Calettamento di un solo volano su albero incastrato a una estremità

Consideriamo un albero di lunghezza l , incastrato a una estremità, sul quale è calettato all'estremità libera un volano (Figura 1).

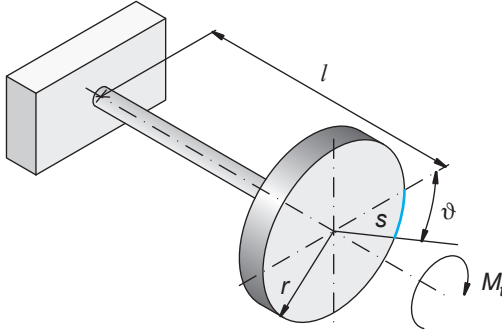


Figura 1

Immaginiamo di effettuare le seguenti operazioni:

- inizialmente allontaniamo il volano dalla sua posizione di equilibrio con l'applicazione di un momento torcente M_t ; il volano ruota, rispetto alla sezione d'incastro, di un angolo ϑ . L'albero reagisce con l'applicazione al volano stesso di un momento di reazione $-M_t$;
- a deformazione avvenuta, interrompiamo bruscamente l'azione della coppia torcente esterna. Il momento elastico di reazione, non più equilibrato, tende a far ruotare il volano verso la posizione iniziale, non deformata;
- dopo averla raggiunta, il volano prosegue per inerzia e dà inizio a un movimento oscillatorio.

Le oscillazioni di questo moto sono dette *oscillazioni torsionali libere* (o *naturali*) in quanto prodotte al cessare della causa perturbatrice.

La *pulsazione naturale* (o *libera*) ω_l delle oscillazioni torsionali libere è espressa sia dalla relazione:

$$\omega_l = \sqrt{\frac{k_r}{J}}$$

dove con k_r si è indicata la rigidezza torsionale dell'albero, cioè:

$$k_r = \frac{G \cdot I_p}{l}$$

sia dalla relazione:

$$\omega_l = \sqrt{\frac{G \cdot I_p}{J \cdot l}}$$

dove:

$$\omega_l = \text{pulsazione naturale} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}, \text{s}^{-1} \right];$$

l = lunghezza dell'albero [m];

G = modulo di elasticità tangenziale del materiale [Pa];

k_r = rigidezza torsionale dell'albero [N · m];

I_p = momento quadratico polare della sezione circolare dell'albero [m^4];
 J = momento d'inerzia assiale di massa del volano, calcolato rispetto all'asse di rotazione [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$]; in termini finiti, J è espresso dalla relazione:

$$J = \sum_{i=1}^n (m_i \cdot r_i^2)$$

in cui:

r_i = distanza dall'asse di rotazione della massa elementare i -esima m_i .

Nota bene

L'espressione:

$$\omega_l = \sqrt{\frac{G \cdot I_p}{J \cdot l}}$$

è dimensionalmente omogenea. Risulta infatti:

$$\omega_l [\text{s}^{-1}] = \left[\sqrt{\frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^4}{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m}}} \right] = \left[\sqrt{\frac{\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^4}{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m}}} \right] = \left[\sqrt{\frac{\text{N}}{\text{kg} \cdot \text{m}}} \right] = \left[\sqrt{\frac{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}}{\text{kg} \cdot \text{m}}} \right] = \left[\sqrt{\frac{1}{\text{s}^2}} \right] = \left[\frac{1}{\text{s}} \right] = [\text{s}^{-1}]$$

Approfondimento

Dimostrazione delle formule:

$$\omega_l = \sqrt{\frac{k_r}{J}}; \quad \omega_l = \sqrt{\frac{G \cdot I_p}{J \cdot l}}$$

Consideriamo sempre l'albero di Figura 1, di lunghezza l , incastrato a una estremità e sul quale è calettato all'estremità libera un volano.

Eseguiamo sul volano le seguenti operazioni:

a) Allontaniamo il volano dalla sua posizione di equilibrio con l'applicazione di un momento torcente M_t . Il volano ruota, rispetto alla sezione d'incastro, di un angolo ϑ esprimibile con la relazione:

$$\vartheta = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} \quad (1)$$

La coppia di reazione $-M_t$ con cui l'albero reagisce al momento deformante è espressa dalla formula (Figura 2):

$$-M_t = k_r \cdot \vartheta \quad (2)$$

dove con k_r si è indicata la rigidezza torsionale dell'albero, ovvero:

$$k_r = \frac{G \cdot I_p}{l} \quad (3)$$

b) Facciamo cessare di colpo l'azione della coppia torcente esterna. Il momento elastico di reazione, non più equilibrato, fa ruotare il volano verso la posizione iniziale non deformata.

c) Dopo averla raggiunta, il volano continua a ruotare per inerzia e dà inizio a un movimento oscillatorio. Questo moto è un moto armonico la cui legge può essere espressa con la formula:

$$\vartheta(t) = \vartheta_{\max} \cdot \cos(\omega_l \cdot t)$$

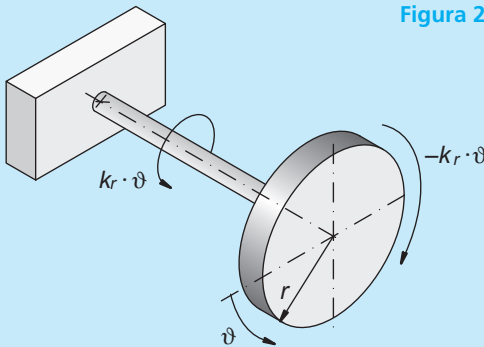


Figura 2

L'oscillazione ω , è detta *oscillazione torsionale libera* (o *naturale*).

È necessario ora fare questa premessa: nel primo volume di questo Corso, in base al secondo principio della dinamica riferito ai corpi rotanti, si è definita *coppia d'inerzia* l'espressione:

$$J \cdot \varepsilon \quad (4)$$

dove:

ε = accelerazione angolare del sistema.

Di solito, se sull'albero è calettato un volano, la coppia d'inerzia è *attribuita* al solo volano in quanto l'inerzia dell'albero è considerata trascurabile.

Ciò premesso, l'equilibrio dinamico che si instaura tra la coppia d'inerzia $J \cdot \varepsilon$ e la coppia di reazione elastica del materiale $k_r \cdot \vartheta$ viene espresso tramite l'equazione:

$$J \cdot \varepsilon = k_r \cdot \vartheta \quad (5)$$

ottenuta dall'uguaglianza tra l'espressione (4) e l'espressione (2).

Se nella (5) si isola ε si ottiene:

$$\varepsilon = \frac{k_r \cdot \vartheta}{J} \quad (6)$$

Se moltiplichiamo ambedue i membri della (6) per il raggio r del volano ricaviamo:

$$\varepsilon \cdot r = \frac{k_r \cdot r \cdot \vartheta}{J} \quad (7)$$

Il primo membro della (7) rappresenta l'accelerazione tangenziale $a_t(t)$ di un generico punto giacente sulla periferia del volano. Questo punto infatti si muove su una circonferenza di raggio r e, per effetto della deformazione subita per opera del momento deformante e in seguito alla reazione elastica dell'albero, ha accelerazione angolare $\varepsilon(t)$.

Per questo punto vale perciò la relazione:

$$a_t(t) = \varepsilon(t) \cdot r \quad (8)$$

Il prodotto $r \cdot \vartheta$ che compare nel secondo membro della (7) esprime la lunghezza s (Figura 1) dell'arco sotteso dall'angolo al centro ϑ di una circonferenza di raggio r . Vale infatti la relazione:

$$s = r \cdot \vartheta \quad (9)$$

Se sostituiamo la (8) e la (9) nella (7) ricaviamo:

$$a_t(t) = \frac{k_r}{J} \cdot s \quad (10)$$

Possiamo quindi affermare che, dato che nella (10) sia k_r sia J sono costanti, l'accelerazione tangenziale $a_t(t)$ di un generico punto giacente sulla periferia del volano è proporzionale allo spostamento s , ovvero:

$$a_t(t) \propto s$$

D'altra parte, l'accelerazione a' di un punto P' che si muove di moto armonico è *esprimibile con la relazione*:

$$a' = \omega^2 \cdot s' \quad (11)$$

dove s' rappresenta l'elongazione del punto P' e ω la pulsazione, costante, del moto armonico. Possiamo quindi affermare che l'accelerazione a' di un punto P' che si muove di moto armonico è proporzionale all'elongazione s' , ovvero:

$$a' \propto s'$$

Dato che l'unico moto nel quale l'accelerazione è proporzionale allo spostamento è il moto armonico, possiamo concludere che il moto oscillatorio di un punto generico giacente sulla periferia del volano è analogo a un moto armonico e quindi ne segue anche le leggi. In base a questa analogia possiamo allora scrivere, dalla (10) e dalla (11):

$$\frac{k_r}{J} = \omega_l^2$$

ovvero:

$$\omega_l = \sqrt{\frac{k_r}{J}} \quad (12)$$

La (12) esprime il valore della *pulsazione libera* ω_l .
Se nella (12) si inserisce la relazione (3):

$$k_r = \frac{G \cdot I_p}{l}$$

si ottiene:

$$\omega_l = \sqrt{\frac{G \cdot I_p}{J \cdot l}}$$

ovvero:

$$\omega_l = \sqrt{\frac{G \cdot I_p}{J \cdot l}}$$

Di conseguenza:

– la *frequenza naturale* f_l dell'oscillazione vale:

$$f_l = \frac{\omega_l}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{G \cdot I_p}{J \cdot l}}$$

– il *periodo naturale* T_l dell'oscillazione è:

$$T_l = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_l} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J \cdot l}{G \cdot I_p}}$$

Relativamente al caso ora esaminato di un albero sul quale è calettato un solo volano, le oscillazioni torsionali si verificano per una sola pulsazione, la *pulsazione naturale* ω_l del sistema. Analogamente a quanto avviene per le oscillazioni flessionali, anche nel caso delle oscillazioni torsionali forzate avvengono fenomeni di *risonanza*. Essi si manifestano se il periodo T di oscillazione delle coppie perturbatrici esterne, periodicamente variabili, coincide con il periodo naturale T_l del sistema. In questo caso l'ampiezza delle oscillazioni subisce elevate amplificazioni dinamiche che possono compromettere anche gravemente il funzionamento dell'albero.

2.2 Oscillazioni torsionali forzate

2.2.1 Calettamento di due volani su albero appoggiato

Consideriamo un albero semplicemente appoggiato sul quale sono calettati due volani (**Figura 3**). Questo albero può ritenersi approssimativamente analogo a un albero di trasmissione sul quale sono calettate due ruote dentate o due pulegge, l'una collegata a un motore, l'altra a un utilizzatore.

Applichiamo sui due volani i seguenti momenti pulsanti aventi entrambi pulsazione ω_0 :

– sul volano 1, avente momento assiale d'inerzia J_1 , applichiamo il momento $-M_1$;

– sul volano 2, avente momento assiale d'inerzia J_2 , con $J_2 = J_1$, applichiamo il momento $+M_2$.

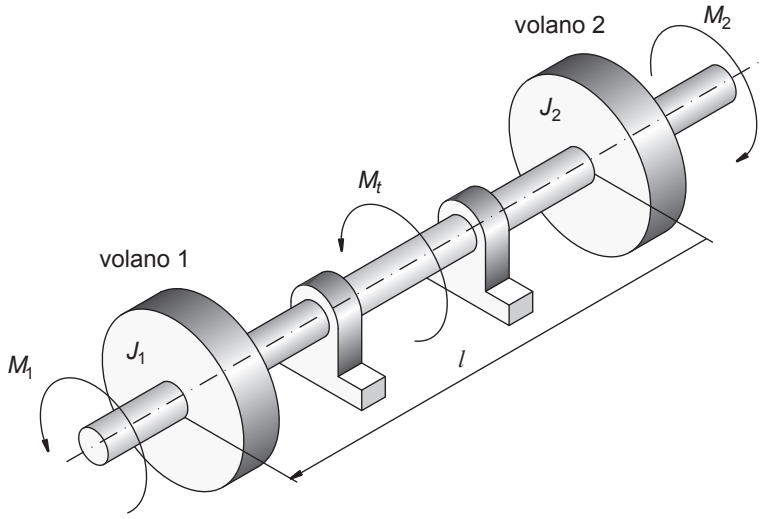


Figura 3

Indichiamo con ϑ_1 e ϑ_2 le rotazioni, misurate a partire dalla posizione di equilibrio, che in un certo istante caratterizzano le configurazioni rispettivamente del volano 1 e del volano 2.

La rotazione relativa $(\vartheta_2 - \vartheta_1)$ produce sull'albero un momento torcente M_t esprimibile con la relazione:

$$M_t = \frac{G \cdot I_p \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)}{l}$$

ovvero:

$$M_t = k_r \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) \quad (13)$$

in quanto k_r , rigidezza torsionale dell'albero, vale: $\frac{G \cdot I_p}{l}$.

Il volano 1 è soggetto sia al momento di reazione M_t prodotto dall'albero, sia al momento pulsante esterno M_1 . Analogamente, il volano 2 è soggetto sia al momento di reazione $-M_t$, sia al momento pulsante esterno M_2 .

Le condizioni di equilibrio sono perciò:

– per il volano 1:

$$M_1 + M_t - J_1 \cdot \varepsilon_1 = 0 \quad (14)$$

– per il volano 2:

$$M_2 - M_t - J_2 \cdot \varepsilon_2 = 0 \quad (15)$$

dove $J_1 \cdot \varepsilon_1$ e $J_2 \cdot \varepsilon_2$ sono le coppie d'inerzia agenti rispettivamente sul volano 1 e sul volano 2.

Ipotizziamo un andamento periodico dei momenti esterni M_1 e M_2 esprimibile con le formule di un moto armonico di pulsazione ω_0 (*pulsazione delle oscillazioni forzate*), ovvero con le espressioni:

$$M_1 = M_{1 \max} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \quad (16)$$

$$M_2 = M_{2 \max} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \quad (17)$$

Da questa ipotesi consegue che sia gli spostamenti angolari ϑ_1 e ϑ_2 , sia il momento torcente M_t devono avere un analogo andamento oscillatorio di pulsazione ω_0 . In particolare, questo andamento è esprimibile con le formule:

– per gli spostamenti angolari ϑ_1 e ϑ_2 :

$$\vartheta_1 = \vartheta_{1 \max} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \quad (18)$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_{2 \max} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \quad (19)$$

– per il momento torcente M_t :

$$M_t = M_{t \max} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \quad (20)$$

Se si pongono a sistema le equazioni dalla (13) alla (20), si ottengono i seguenti risultati:

– *pulsazione torsionale libera* ω_l :

$$\omega_l = \sqrt{k_r \cdot \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)}$$

dove k_r , rigidezza torsionale dell'albero, vale: $\frac{G \cdot I_p}{l}$;

– momento torcente massimo $M_{t \max}$ agente sull'albero:

$$M_{t \max} = \frac{k_r \cdot \left(\frac{M_{1 \max}}{J_1} - \frac{M_{2 \max}}{J_2} \right)}{\omega_0^2 - \omega_l^2}$$

Da quest'ultima relazione ricaviamo che il momento torcente che agisce sull'albero è tanto maggiore quanto minore è la differenza $\omega_0^2 - \omega_l^2$. Ciò significa che più la pulsazione ω_0 delle oscillazioni forzate si avvicina alla pulsazione ω_l delle oscillazioni libere (*oscillazione critica*), più cresce il momento torcente $M_{t \max}$.

Al limite, se si trascura lo smorzamento delle resistenze passive, per $\omega_0 \rightarrow \omega_l$ risulta:

$$M_{t \max} \rightarrow \infty$$

ESERCIZI SVOLTI

Argomenti:

- A** Oscillazioni torsionali libere - Albero con due volani: calcolo della pulsazione ω_l
B Oscillazioni torsionali forzate - Albero con due volani: calcolo della pulsazione ω_l e della massima sollecitazione di torsione $M_{t \max}$

A Esercizio 1

Un albero rotante semplicemente appoggiato ha diametro $d_{\text{alb}} = 60$ mm e lunghezza $l = 1$ m. L'albero porta, calettati alle due estremità, due volani, V_1 e V_2 , aventi le seguenti caratteristiche:

- volano V_1 : ha diametro $d_{\text{vol1}} = 40$ cm; è del tipo a disco, con spessore $s_1 = 50$ mm; il materiale di cui è costituito è acciaio ($\rho_{\text{acc}} = 7850$ kg/m³);
- volano V_2 : è del tipo a corona; le dimensioni $b \times s_2$ della sezione della corona sono 5×8 cm; il diametro medio $d_{m \text{ vol2}}$ vale 50 cm; il materiale impiegato è ghisa ($\rho_{\text{ghisa}} = 7180$ kg/m³).

Calcolare la pulsazione ω_l delle oscillazioni torsionali libere che si manifestano sull'albero.

SOLUZIONE Applichiamo la relazione:

$$\omega_l = \sqrt{k_r \cdot \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)} = \sqrt{\frac{G \cdot I_p}{l} \cdot \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)}$$

dove k_r , rigidità dell'albero, è espressa dalla relazione:

$$k_r = \frac{G \cdot I_p}{l}$$

Suddividiamo il procedimento di calcolo nelle seguenti fasi:

a) Determinazione del momento d'inerzia assiale di massa J_1 del volano V_1

Il calcolo della massa m_1 viene realizzato con la formula:

$$m_1 = V_{\text{volano 1}} \cdot \rho_{\text{volano}}$$

dove con $V_{\text{volano 1}}$ si è indicato il volume del volano 1.

Dato che si tratta di un volano a disco, la formula precedente diviene:

$$m_1 = \left(\frac{\pi \cdot d_{\text{vol1}}^2}{4} \cdot s_1 \right) \cdot \rho_{\text{acc}}$$

Con i valori numerici in nostro possesso ricaviamo:

$$m_1 = \frac{\pi \cdot 0,4^2 \text{ m}^2}{4} \cdot 0,05 \text{ m} \cdot 7850 \text{ kg/m}^3 \approx 49,32 \text{ kg}$$

in quanto è:

$$d_{vol1} = 40 \text{ cm} = 0,4 \text{ m};$$

$$s_1 = 50 \text{ mm} = 0,05 \text{ m}.$$

Il momento d'inerzia assiale di massa J di un volano a disco è calcolato con la formula:

$$J = \frac{m \cdot r^2}{2}$$

Nel nostro caso esso vale:

$$J_1 = \frac{m_1 \cdot r_1^2}{2} = \frac{49,32 \text{ kg} \cdot 0,2^2 \text{ m}^2}{2} \approx 0,986 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

b) Determinazione del momento d'inerzia assiale di massa J_2 del volano V_2

Il calcolo della massa m_2 della corona viene realizzato con la formula:

$$m_2 = V_{c \text{ volano } 2} \cdot \rho_{ghisa} \quad (1)$$

nella quale, dato che si tratta di un volano a corona, il volume della corona $V_{c \text{ volano } 2}$ può essere calcolato in base al secondo teorema di Pappo-Guldino con l'espressione:

$$V_{c \text{ volano } 2} = (b \cdot s_2) \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{d_{m \text{ vol } 2}}{2} = (b \cdot s_2) \cdot \pi \cdot d_{m \text{ vol } 2} \quad (2)$$

Se inseriamo la (2) nella (1) otteniamo:

$$m_2 = V_{c \text{ volano } 2} \cdot \rho_{ghisa} = (b \cdot s_2) \cdot \pi \cdot d_{m \text{ vol } 2} \cdot \rho_{ghisa}$$

Con i valori numerici in nostro possesso ricaviamo:

$$m_2 = 0,05 \text{ m} \cdot 0,08 \text{ m} \cdot \pi \cdot 0,5 \text{ m} \cdot 7180 \text{ kg/m}^3 \approx 45,11 \text{ kg}$$

in quanto è:

$$b = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m};$$

$$s_2 = 8 \text{ cm} = 0,08 \text{ m};$$

$$d_{m \text{ vol } 2} = 50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m}.$$

Il momento d'inerzia assiale di massa J di un volano a corona è calcolato con la formula:

$$J = m \cdot r_m^2$$

Nel nostro caso vale:

$$J_2 = m_2 \cdot r_m^2 = m_2 \cdot \left(\frac{d_{m \text{ vol } 2}}{2} \right)^2 = 45,11 \cdot \left(\frac{0,5 \text{ m}}{2} \right)^2 \approx 2,82 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

c) Determinazione del momento d'inerzia polare I_p della sezione retta dell'albero

Dall'espressione:

$$I_p = \frac{\pi \cdot d_{alb}^4}{32}$$

si ricava:

$$I_p = \frac{\pi \cdot 0,06^4 \text{ m}^4}{32} \approx 1,272 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

dato che è:

$$d_{\text{alb}} = 60 \text{ mm} = 0,06 \text{ m.}$$

d) Calcolo della pulsazione ω_l delle oscillazioni torsionali libere che si manifestano sull'albero

Dall'espressione:

$$\omega_l = \sqrt{\frac{G \cdot I_p}{l} \cdot \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)}$$

con i valori numerici in nostro possesso ricaviamo:

$$\omega_l = \sqrt{\frac{8,15 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \cdot 1,272 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4}{1 \text{ m}} \cdot \left(\frac{1}{0,986 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} + \frac{1}{2,82 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} \right)} \approx 377 \text{ rad/s}$$

dove si è assunto per G , modulo di elasticità tangenziale dell'acciaio di cui è costituito l'albero, il valore:

$$G = 81500 \text{ N/mm}^2 = 8,15 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$$

Alla pulsazione $\omega_l \approx 377 \text{ rad/s}$ delle oscillazioni torsionali libere corrisponde una velocità critica n_{crit} di rotazione dell'albero pari a:

$$n_{\text{cr}} = \frac{60 \cdot \omega_l}{2 \cdot \pi} = \frac{60 \cdot 377 \text{ rad/s}}{2 \cdot \pi} \approx 3600 \text{ giri/min}$$

B

Esercizio 2

Su un albero di trasmissione semplicemente appoggiato, avente diametro $d_{\text{alb}} = 90 \text{ mm}$, sono calettate due masse volaniche V_1 e V_2 , distanti tra di loro $1,5 \text{ m}$. Le caratteristiche delle due masse, di spessore costante, sono le seguenti:

- massa volanica V_1 : diametro $d_{\text{vol1}} = 50 \text{ cm}$; massa $m_1 = 40 \text{ kg}$;
- massa volanica V_2 : diametro $d_{\text{vol2}} = 40 \text{ cm}$; massa $m_2 = 30 \text{ kg}$.

Sull'albero agiscono due momenti pulsanti aventi pulsazione $\omega_0 = 620 \text{ rad/s}$, le cui ampiezze massime sono rispettivamente: $M_{1 \text{ max}} = 1000 \text{ N} \cdot \text{m}$; $M_{2 \text{ max}} = 1200 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Dopo aver verificato se la pulsazione ω_0 dei momenti coincide con quella delle oscillazioni torsionali libere, calcolare il momento torcente massimo $M_{t \text{ max}}$ agente sull'albero.

SOLUZIONE

Per determinare il valore della pulsazione ω_l delle oscillazioni libere ci serviamo della relazione:

$$\omega_l = \sqrt{k_r \cdot \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)} = \sqrt{\frac{G \cdot I_p}{l} \cdot \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)}$$

dove k_r , rigidezza dell'albero, è espressa dalla relazione:

$$k_r = \frac{G \cdot I_p}{l}$$

Suddividiamo il procedimento di calcolo nelle seguenti fasi:

a) Determinazione dei momenti d'inerzia assiali di massa delle masse volaniche

Dato che si tratta di masse volaniche approssimabili a dischi pieni, si utilizza per entrambe la formula:

$$J = \frac{m \cdot r^2}{2}$$

Con i valori numerici in nostro possesso ricaviamo:

– per la massa volanica V_1 :

$$J_1 = \frac{m_1 \cdot r_1^2}{2} = \frac{40 \text{ kg} \cdot (25 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2}{2} = 1,25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

dato che è :

$$r_1 = \frac{d_{\text{vol1}}}{2} = \frac{50 \text{ cm}}{2} = 25 \text{ cm} = 25 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

– per la massa volanica V_2 :

$$J_2 = \frac{m_2 \cdot r_2^2}{2} = \frac{30 \text{ kg} \cdot (20 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2}{2} = 0,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

dato che è:

$$r_2 = \frac{d_{\text{vol2}}}{2} = \frac{40 \text{ cm}}{2} = 20 \text{ cm} = 20 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

b) Determinazione del momento d'inerzia polare I_p della sezione retta dell'albero

Dall'espressione:

$$I_p = \frac{\pi \cdot d_{\text{alb}}^4}{32}$$

si ricava:

$$I_p = \frac{\pi \cdot 0,09^4 \text{ m}^4}{32} \approx 6,44 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

dato che è:

$$d_{\text{alb}} = 90 \text{ mm} = 0,09 \text{ m}.$$

c) Calcolo della pulsazione ω , delle oscillazioni torsionali libere che si manifestano sull'albero

Dall'espressione:

$$\omega_l = \sqrt{\frac{G \cdot I_p}{l} \cdot \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)}$$

con i valori numerici in nostro possesso ricaviamo:

$$\omega_l = \sqrt{\frac{8,15 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \cdot 6,44 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4}{1,5 \text{ m}} \cdot \left(\frac{1}{1,25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} + \frac{1}{0,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} \right)} \approx 929 \text{ rad/s}$$

dove si è assunto per G , modulo di elasticità tangenziale dell'acciaio di cui è costituito l'albero, il valore:

$$G = 81\,500 \text{ N/mm}^2 = 8,15 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$$

Possiamo perciò affermare che la pulsazione ω_l delle oscillazioni torsionali libere, pari a 929 rad/s, è molto maggiore della pulsazione dei momenti esterni, il cui valore è: $\omega_0 = 620 \text{ rad/s}$.

d) Determinazione del momento torcente massimo $M_{t \max}$ agente sull'albero

Utilizziamo l'espressione:

$$M_{t \max} = \frac{k_r \cdot \left(\frac{M_{1 \max}}{J_1} - \frac{M_{2 \max}}{J_2} \right)}{\omega_0^2 - \omega_l^2} = \frac{G \cdot I_p}{l} \cdot \frac{\left(\frac{M_{1 \max}}{J_1} - \frac{M_{2 \max}}{J_2} \right)}{\omega_0^2 - \omega_l^2}$$

dove k_r , rigidezza dell'albero, è espressa dalla relazione:

$$k_r = \frac{G \cdot I_p}{l}$$

Con i valori numerici in nostro possesso ricaviamo:

$$M_{t \max} = \frac{8,15 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \cdot 6,44 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4}{1,5 \text{ m}} \cdot \frac{\left(\frac{1000 \text{ N} \cdot \text{m}}{1,25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} - \frac{1200 \text{ N} \cdot \text{m}}{0,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} \right)}{(620 \text{ rad/s})^2 - (929 \text{ rad/s})^2} \approx 877 \text{ N} \cdot \text{m}$$

VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO

Riconoscere se le seguenti affermazioni sono vere (V) o false (F).

1. Le oscillazioni torsionali di un albero incastrato a una estremità e sul quale è calettato all'estremità libera un volano si verificano per una sola pulsazione del sistema. V F
2. Più la pulsazione ω_0 delle oscillazioni forzate si avvicina alla pulsazione ω_f delle oscillazioni libere, più si riduce il momento torcente massimo $M_{t\max}$. V F
3. Se si trascura lo smorzamento delle resistenze passive, per $\omega_0 \rightarrow \omega_f$ risulta: $M_{t\max} \rightarrow 0$. V F

QUESITI

Individuare la risposta esatta ai seguenti quesiti a risposta multipla.

1. La pulsazione naturale (o libera) ω_l delle oscillazioni torsionali libere di un albero incastrato a una estremità e sul quale è calettato all'estremità libera un volano può essere espressa con la relazione:

☐ a $\omega_l = \sqrt{\frac{k_r}{J}}$

☐ b $\omega_l = \sqrt{\frac{J}{k_r}}$

☐ c $\omega_l = \frac{k_r}{J}$

☐ d $\omega_l = \frac{J}{k_r}$

con:

k_r = rigidezza dell'albero;

J = momento d'inerzia assiale di massa del volano, calcolato rispetto all'asse di rotazione.

2. La rigidezza torsionale k_r di un albero è esprimibile con la relazione:

☐ a $k_r = \frac{G}{l \cdot I_p}$

☐ b $k_r = \frac{G \cdot I_p}{l}$

☐ c $k_r = \frac{l}{G \cdot I_p}$

☐ d $k_r = \frac{I_p}{G \cdot l}$

con:

G = modulo di elasticità tangenziale dell'acciaio di cui è costituito l'albero;

I_p = momento d'inerzia polare della sezione retta dell'albero;

l = lunghezza dell'albero.

ESERCIZI PROPOSTI

Argomenti:

A Oscillazioni torsionali libere - Albero con due volani: calcolo della pulsazione ω_l

B Oscillazioni torsionali forzate - Albero con due volani: calcolo della pulsazione ω_l e della massima sollecitazione di torsione $M_{t\max}$

A | Esercizio 1

Calcolare la pulsazione ω_l delle oscillazioni torsionali libere che si manifestano su un albero rotante semplicemente appoggiato, avente diametro $d_{\text{alb}} = 55 \text{ mm}$ e lunghezza $l = 0,8 \text{ m}$. L'albero porta, calettati alle due estremità, due volani, V_1 e V_2 , aventi le seguenti caratteristiche:

- volano V_1 : ha diametro $d_{\text{vol1}} = 45 \text{ cm}$; è del tipo a disco, con spessore $s_1 = 55 \text{ mm}$; il materiale di cui è costituito è acciaio ($\rho_{\text{acc}} = 7850 \text{ kg/m}^3$);
- volano V_2 : è del tipo a corona; le dimensioni $b \times s_2$ della sezione della corona sono $4 \times 7 \text{ cm}$; il diametro medio $d_{m\text{vol2}}$ vale 40 cm ; il materiale impiegato è ghisa ($\rho_{\text{ghisa}} = 7180 \text{ kg/m}^3$).

Assumere per G , modulo di elasticità tangenziale dell'acciaio di cui è costituito l'albero, il valore:

$$G = 81\,500 \text{ N/mm}^2 = 8,15 \cdot 10^{10} \text{ Pa.}$$

$$[m_1 \approx 68,67 \text{ kg}; J_1 \approx 1,74 \text{ kg} \cdot \text{m}^2; m_2 \approx 25,26 \text{ kg}; J_2 \approx 1,01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2; I_p \approx 8,98 \cdot \text{m}^4; \omega_l \approx 378 \text{ rad/s}; n_{\text{crit}} \approx 3614 \text{ giri/min}]$$

B | Esercizio 2

Calcolare il momento torcente massimo agente su un albero di trasmissione avente diametro $d_{\text{alb}} = 95 \text{ mm}$ e sul quale sono calettate due masse volaniche V_1 e V_2 , distanti tra di loro $1,2 \text{ m}$. Le caratteristiche delle due masse, di spessore costante, sono le seguenti:

- massa volanica V_1 : diametro $d_{\text{vol1}} = 55 \text{ cm}$; massa $m_1 = 45 \text{ kg}$;
- massa volanica V_2 : diametro $d_{\text{vol2}} = 45 \text{ cm}$; massa $m_2 = 35 \text{ kg}$.

Sull'albero agiscono due momenti pulsanti aventi pulsazione $\omega_0 = 615 \text{ rad/s}$ le cui ampiezze massime sono rispettivamente: $M_{1\max} = 1100 \text{ N} \cdot \text{m}$; $M_{2\max} = 1300 \text{ N} \cdot \text{m}$. Assumere per G , modulo di elasticità tangenziale dell'acciaio di cui è costituito l'albero, il valore:

$$G = 81\,500 \text{ N/mm}^2 = 8,15 \cdot 10^{10} \text{ Pa.}$$

Verificare se la pulsazione ω_0 dei momenti esterni coincide con quella delle oscillazioni torsionali libere.

$$[J_1 \approx 1,7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2; J_2 \approx 0,886 \text{ kg} \cdot \text{m}^2; I_p \approx 7,996 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4; \omega_l \approx 965,49 \text{ rad/s, dunque molto maggiore di } \omega_0; M_{t\max} \approx 804,8 \text{ N} \cdot \text{m}]$$



RISORSE DIGITALI

- Esercizio proposto N. 1 con foglio elettronico: Oscillazioni torsionali_1
- Esercizio proposto N. 2 con foglio elettronico: Oscillazioni torsionali_2