

Dimostrazione della formula del rendimento η_B del ciclo di Brayton:

$$\eta_B = 1 - \frac{1}{\beta^{\frac{k-1}{k}}}$$

Il rendimento η di un ciclo termodinamico può essere espresso dalla relazione:

$$\eta = \frac{q_{\text{sup}} - q_{\text{inf}}}{q_{\text{sup}}} = 1 - \frac{q_{\text{inf}}}{q_{\text{sup}}} \quad (1)$$

Per quanto riguarda il ciclo di Brayton (Figura 1), risulta:

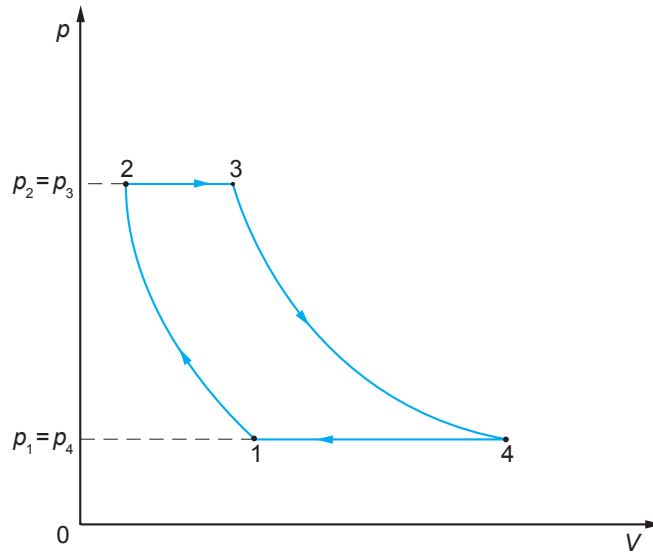
$$q_{\text{inf}} = c_p \cdot (T_4 - T_1) \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (2)$$

$$q_{\text{sup}} = c_p \cdot (T_3 - T_2) \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (3)$$

in quanto sia la trasformazione 4-1 sia la 2-3 sono isobariche.

Figura 1

Rappresentazione nel piano di Clapeyron (p, V) del ciclo termodinamico di Brayton.



Se si sostituiscono le espressioni (2) e (3) nella (1) si ottiene:

$$\eta = 1 - \frac{c_p \cdot (T_4 - T_1)}{c_p \cdot (T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\frac{T_3}{T_2} - 1} \quad (4)$$

Si ha inoltre:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \beta^{\frac{k-1}{k}} \quad (5)$$

$$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{p_4}{p_3} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{1}{\beta^{\frac{k-1}{k}}} \quad (6)$$

in quanto le trasformazioni 1-2 e 3-4 sono per ipotesi adiabatiche reversibili e si è posto:

$$-\beta = \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_3}{p_4} = \text{rapporto di compressione};$$

$$-k = \frac{c_p}{c_v} \text{ con,}$$

c_p = capacità termica massica a pressione costante;

c_v = capacità termica massica a volume costante.

Se si inseriscono le espressioni (5) e (6) nella (4), quest'ultima relazione diviene:

$$\eta_B = 1 - \frac{1}{\beta^{\frac{k-1}{k}}} \cdot \frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\frac{T_3}{T_2} - 1} \quad (7)$$

Dato che è:

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{T_3}{T_4} \cdot \frac{T_4}{T_1} \cdot \frac{T_1}{T_2} = \beta^{\frac{k-1}{k}} \cdot \frac{T_4}{T_1} \cdot \frac{1}{\beta^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{T_4}{T_1} \quad (8)$$

la relazione (7) può anche scriversi:

$$\eta_B = 1 - \frac{1}{\beta^{\frac{k-1}{k}}} \cdot \frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\frac{T_3}{T_2} - 1} = 1 - \frac{1}{\beta^{\frac{k-1}{k}}} \quad (9)$$