

Dimostrazione delle formule del lavoro di deformazione della molla a spirale

Se si indicano con l la lunghezza sviluppata dalla molla, con M il momento che sollecita la molla a flessione e con φ l'angolo di cui è ruotata la sezione finale rispetto a quella iniziale, si ha:

$$\varphi = \frac{M \cdot l}{E \cdot I_n}$$

1. Se la molla è *a nastro*, detti b e h i lati della sezione rettangolare, risulta:

$$I_n = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Se inseriamo questa relazione nell'espressione precedente, ricaviamo:

$$\varphi = \frac{12 \cdot M \cdot l}{E \cdot b \cdot h^3}$$

Il lavoro di deformazione, che vale:

$$L_{\text{def}} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \varphi$$

assume perciò la forma:

$$L_{\text{def nastro}} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \left(\frac{12 \cdot M \cdot l}{E \cdot b \cdot h^3} \right) = \frac{6 \cdot M^2 \cdot l}{E \cdot b \cdot h^3} \quad (1)$$

D'altra parte la relazione di Navier:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M}{W_f}$$

dato che il modulo di resistenza a flessione W_f per una sezione rettangolare di base b e altezza h vale:

$$W_f = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

può scriversi:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{6 \cdot M}{b \cdot h^2}$$

o anche, se si ricava M :

$$M = \frac{\sigma_{\text{max}} \cdot b \cdot h^2}{6} \quad (2)$$

Se si sostituisce l'espressione (2) nella (1) e si semplifica, si ottiene:

$$L_{\text{def nastro}} = \frac{6 \cdot l}{E \cdot b \cdot h^3} \cdot \left(\frac{\sigma_{\text{max}} \cdot b \cdot h^2}{6} \right)^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{\sigma_{\text{max}}^2 \cdot b \cdot h \cdot l}{E} \quad (3)$$

Dal momento che è:

$$b \cdot h \cdot l = V_3$$

dove V_3 è il volume del nastro, la (3) diviene:

$$L_{\text{def nastro}} = \frac{1}{6} \cdot V_3 \cdot \frac{\sigma_{\text{max}}^2}{E}$$

2. Se la molla è *di sezione circolare*, detto d_{filo} il diametro del filo, risulta:

$$I_n = \frac{\pi \cdot d_{\text{filo}}^4}{64}$$

Se inseriamo questa relazione nell'espressione precedente, ricaviamo:

$$\varphi = \frac{M \cdot l}{E \cdot \frac{\pi \cdot d_{\text{filo}}^4}{64}} = \frac{64 \cdot M \cdot l}{E \cdot \pi \cdot d_{\text{filo}}^4}$$

Il lavoro di deformazione, che vale:

$$L_{\text{def}} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \varphi$$

assume quindi la forma:

$$L_{\text{def}} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \left(\frac{64 \cdot M \cdot l}{E \cdot \pi \cdot d_{\text{filo}}^4} \right) = \frac{32 \cdot M^2 \cdot l}{E \cdot \pi \cdot d_{\text{filo}}^4} \quad (4)$$

D'altra parte, la relazione di Navier:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M}{W_f}$$

dato che il modulo di resistenza a flessione W_f di una sezione circolare piena di diametro d vale:

$$W_f = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$$

può scriversi:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M}{\frac{\pi \cdot d_{\text{filo}}^3}{32}} = \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot d_{\text{filo}}^3}$$

o anche, se si ricava M :

$$M = \frac{\sigma_{\text{max}} \cdot \pi \cdot d_{\text{filo}}^3}{32} \quad (5)$$

Se si sostituisce l'espressione (5) nella (4) e si semplifica, si ottiene:

$$L_{\text{def filo}} = \frac{32 \cdot \left(\frac{\sigma_{\text{max}} \cdot \pi \cdot d_{\text{filo}}^3}{32} \right)^2 \cdot l}{E \cdot \pi \cdot d_{\text{filo}}^4} = \frac{\sigma_{\text{max}}^2 \cdot \pi \cdot d_{\text{filo}}^2 \cdot l}{32 \cdot E} \quad (6)$$

ovvero, anche:

$$L_{\text{def filo}} = \frac{\sigma_{\text{max}}^2 \cdot \pi \cdot d_{\text{filo}}^2 \cdot l}{4 \cdot 8 \cdot E} \quad (7)$$

Se indichiamo con V_4 il volume della molla, risulta:

$$V_4 = \frac{\pi \cdot d_{\text{filo}}^2 \cdot l}{4}$$

Se inseriamo quest'ultima relazione nella (7) ricaviamo:

$$L_{\text{def filo}} = \frac{1}{8} \cdot V_4 \cdot \frac{\sigma_{\text{max}}^2}{E}$$