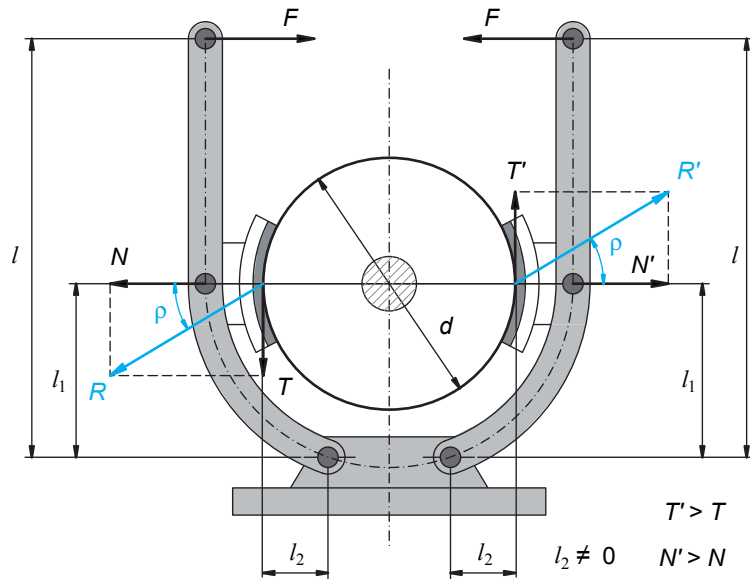


## Dimostrazione della formula:

$$F = \frac{2 \cdot M_{fr} \cdot (l_1 - f \cdot l_2)}{d \cdot \left( 1 + \frac{l_1 - f \cdot l_2}{l_1 + f \cdot l_2} \right) \cdot l \cdot f}$$

Consideriamo il freno a due ceppi di **Figura 1**.



**Figura 1**

Freno a due ceppi esterni (schema).

Se ipotizziamo una distribuzione uniforme della forza scambiata tra ceppi e puleggia, le reazioni  $R$  e  $R'$  della puleggia giacciono sull'asse di simmetria dei ceppi. In questa ipotesi la reazione  $R$  è considerata applicata al centro del ceppo di sinistra, la  $R'$  al centro di quello di destra.

Entrambe le reazioni non sono disposte radialmente ma sono inclinate dell'angolo di attrito  $p$  rispetto alla direzione radiale e in senso opposto a quello di rotazione del tamburo.

Se si scompone la reazione di sinistra  $R$  nelle sue due componenti, radiale  $N$  e tangenziale  $T$ , risulta:

$$T = N \cdot \operatorname{tg} p = N \cdot f$$

ovvero:

$$N = \frac{T}{f} \quad (1)$$

Se il senso di rotazione della puleggia è quello orario, l'equazione di equilibrio della leva di sinistra rispetto al suo fulcro  $O$  è:

$$F \cdot l - N \cdot l_1 - T \cdot l_2 = 0$$

dove  $l$ ,  $l_1$  e  $l_2$  sono le distanze evidenziate in figura.

La precedente relazione può scriversi, se si esplicita  $F$  e in base alla (1):

$$F = \frac{\frac{T}{f} \cdot l_1 + T \cdot l_2}{l} = \frac{T}{l} \cdot \left( \frac{l_1}{f} + l_2 \right) \quad (2)$$

D'altra parte, se la forza  $F$  agente sulla leva di destra è uguale a quella applicata alla leva di sinistra, l'equazione di equilibrio della leva di destra rispetto al suo fulcro  $O'$  è:

$$F \cdot l - N' \cdot l_1 - T' \cdot l_2 = 0$$

Da tale espressione si ricava:

$$F = \frac{T'}{l} \cdot \left( \frac{l_1}{f} - l_2 \right) \quad (3)$$

Dalle relazioni (2) e (3) si ottiene:

$$\frac{T}{l} \cdot \left( \frac{l_1}{f} + l_2 \right) = \frac{T'}{l} \cdot \left( \frac{l_1}{f} - l_2 \right)$$

ovvero:

$$\frac{T}{T'} = \frac{l_1 - f \cdot l_2}{l_1 + f \cdot l_2} \quad (4)$$

Dalla (4) si deduce pertanto che è:  $T < T'$ .

D'altra parte il momento frenante  $M_{fr}$  vale:

$$M_{fr} = (T + T') \cdot \frac{d}{2}$$

dove  $d$  è il diametro della puleggia, per cui si ha:

$$T + T' = \frac{2 \cdot M_{fr}}{d} \quad (5)$$

Se si pongono a sistema le espressioni (4) e (5), stabiliti i valori di  $d$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  e  $f$  e noto il valore del momento  $M_{fr}$  da realizzare, si ricavano  $T$  e  $T'$  e di conseguenza dall'espressione (2) o dalla (3) la forza  $F$  da applicare alla leva.

Si può procedere nel modo seguente:

1. dalla formula (4) si ottiene:

$$T = T' \cdot \frac{l_1 - f \cdot l_2}{l_1 + f \cdot l_2} \quad (6)$$

2. risolviamo il sistema per sostituzione. Se si sostituisce l'espressione (6) nella (5) si ha:

$$T' \cdot \left( 1 + \frac{l_1 - f \cdot l_2}{l_1 + f \cdot l_2} \right) = \frac{2 \cdot M_{fr}}{d}$$

da cui:

$$T' = \frac{2 \cdot M_{fr}}{d \cdot \left( 1 + \frac{l_1 - f \cdot l_2}{l_1 + f \cdot l_2} \right)} \quad (7)$$

3. se si sostituisce l'espressione (7) nella (3) si ricava:

$$F = \frac{2 \cdot M_{fr} \cdot (l_1 - f \cdot l_2)}{d \cdot \left( 1 + \frac{l_1 - f \cdot l_2}{l_1 + f \cdot l_2} \right) \cdot l \cdot f} \quad (8)$$

**Nota bene**

Se è  $l_2 = 0$  (Figura 2), dalla relazione (4) si ricava:

$$T = T'$$

la (5) diventa:

$$2 \cdot T = \frac{2 \cdot M_{fr}}{d}$$

cioè:

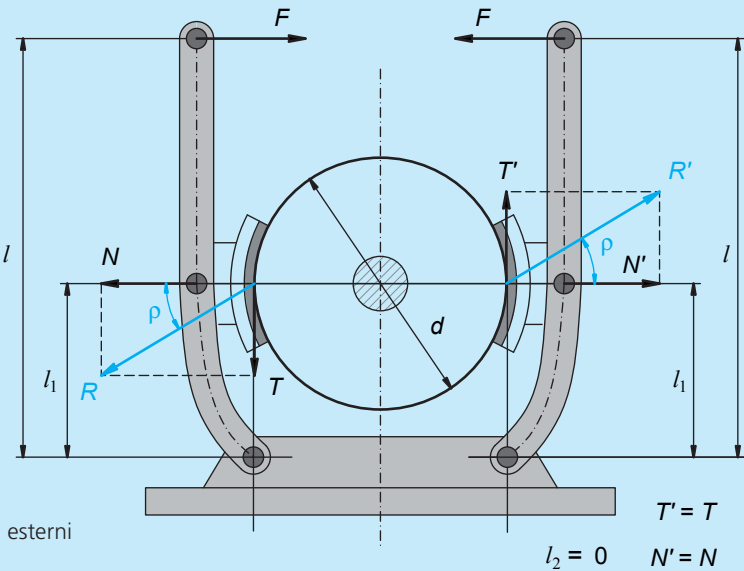
$$T = \frac{M_{fr}}{d} \quad (9)$$

e la forza  $F$  è esprimibile con la relazione:

$$F = \frac{T}{l} \cdot \frac{l_1}{f}$$

ovvero, dalla (9):

$$F = \frac{M_{fr} \cdot l_1}{d \cdot l \cdot f} \quad (10)$$



**Figura 2**  
Freno a due ceppi esterni  
(schema).