

Dimostrazione della formula del rendimento η_H del ciclo di Hirn:

$$\eta_H = \frac{h_3 - h_{4r}}{h_3 - h_1}$$

Dalla termodinamica sappiamo che il lavoro l_{id} prodotto in un ciclo è esprimibile come differenza tra il calore ceduto al fluido dalla sorgente superiore q_{sup} e il calore che il fluido cede alla sorgente inferiore q_{inf} , ovvero:

$$l_{id} = q_{sup} - q_{inf} \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (1)$$

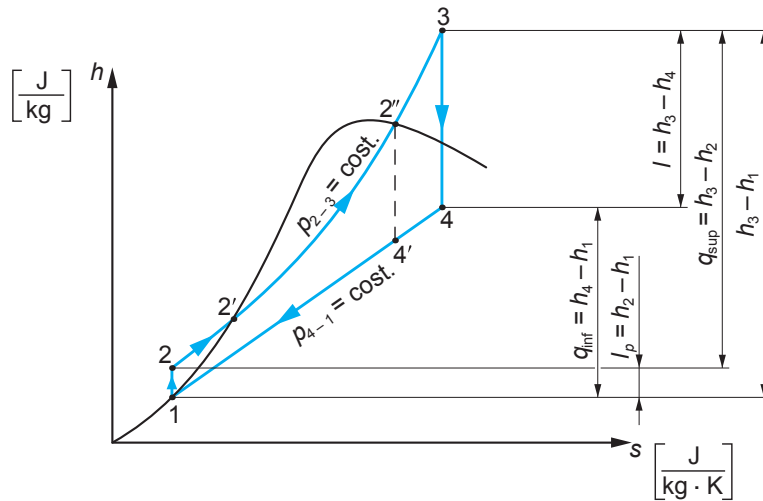
Il rendimento ideale η_{Hid} del ciclo Hirn vale allora:

$$\eta_{Hid} = \frac{q_{sup} - q_{inf}}{q_{sup}} = \frac{l_{id}}{q_{sup}} \quad (2)$$

Con riferimento al diagramma di Mollier del vapor d'acqua di **Figura 1**, il calore q_{sup} ceduto al fluido nel corso della trasformazione isobarica 2-3 è a sua volta uguale alla variazione di entalpia $h_3 - h_2$, se si trascurano le variazioni di energia potenziale e di energia cinetica che il fluido subisce durante la trasformazione stessa.

Figura 1

Rappresentazione sul diagramma di Mollier del vapor d'acqua di un ciclo di Hirn.



Risulta cioè:

$$q_{sup} \approx h_3 - h_2 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (3)$$

Dal momento che il lavoro speso per comprimere l'acqua l_p è assai ridotto, è lecito trascurare la variazione di entalpia $h_2 - h_1$ corrispondente alla compressione isoentropica 1-2 e considerare coincidenti i punti 1 e 2. In seguito a tale semplificazione l'espressione (3) diviene:

$$q_{sup} \approx h_3 - h_1 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (4)$$

D'altra parte, il calore q_{inf} che il fluido cede alla sorgente inferiore è ricavabile con l'espressione:

$$q_{inf} \approx h_4 - h_1 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (5)$$

Il rendimento ideale del ciclo vale allora, se si sostituiscono le relazioni (4) e (5) nella (2):

$$\eta_{Hid} = \frac{h_3 - h_1 - (h_4 - h_1)}{h_3 - h_1} \approx \frac{h_3 - h_4}{h_3 - h_1} \quad (6)$$

Pertanto, se si trascura il lavoro l_p speso dalla pompa per comprimere l'acqua, il lavoro l_{id} prodotto dal ciclo vale:

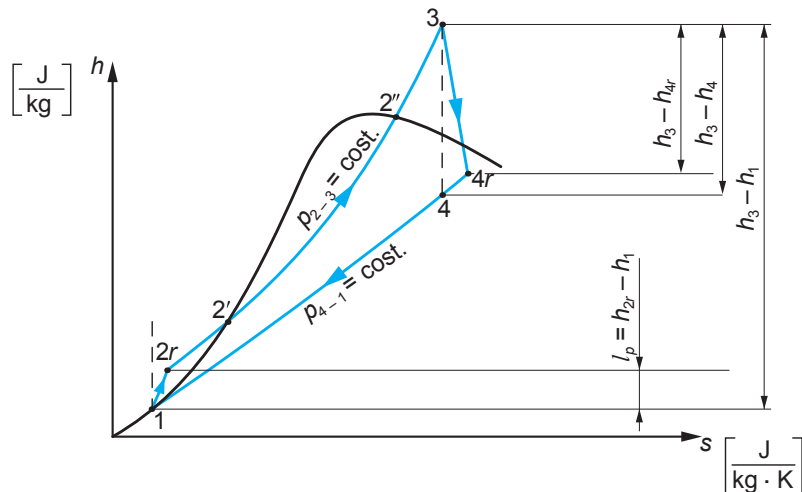
$$l_{id} = h_3 - h_4 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (7)$$

e coincide con quello realizzato nell'espansione del fluido in turbina.

In realtà l'espansione del vapore in turbina, così come la compressione del liquido a opera della pompa, non sono trasformazioni isoentropiche ma adiabatiche non reversibili. Perciò, se si vuole rappresentare un ciclo di Hirn reale, i tratti verticali 1-2 e 3-4 relativi alle trasformazioni teoriche a entropia costante, cioè reversibili, devono essere sostituiti dai tratti 1-2 r e 3-4 r , inclinati nel senso dell'entropia crescente (Figura 2).

Figura 2

Rappresentazione, sul diagramma di Mollier del vapor d'acqua, di un ciclo di Hirn nel quale le isoentropiche sono state sostituite da adiabatiche non reversibili.



Nota bene

A rigore, sul diagramma (h, s) di Figura 2 possono comparire i soli punti 2 r e 4 r di fine trasformazione e non le trasformazioni 1-2 r e 3-4 r , in quanto esse non sono reversibili e quindi non sono rappresentabili sul piano entalpico.

Di conseguenza il lavoro l_r prodotto nel ciclo reale, se si trascura il lavoro della compressione adiabatica 1-2 r , vale :

$$l_r = h_3 - h_{4r} \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (8)$$

Il rendimento effettivo del ciclo allora diviene:

$$\eta_H = \frac{h_3 - h_{4r}}{h_3 - h_1} \quad (9)$$