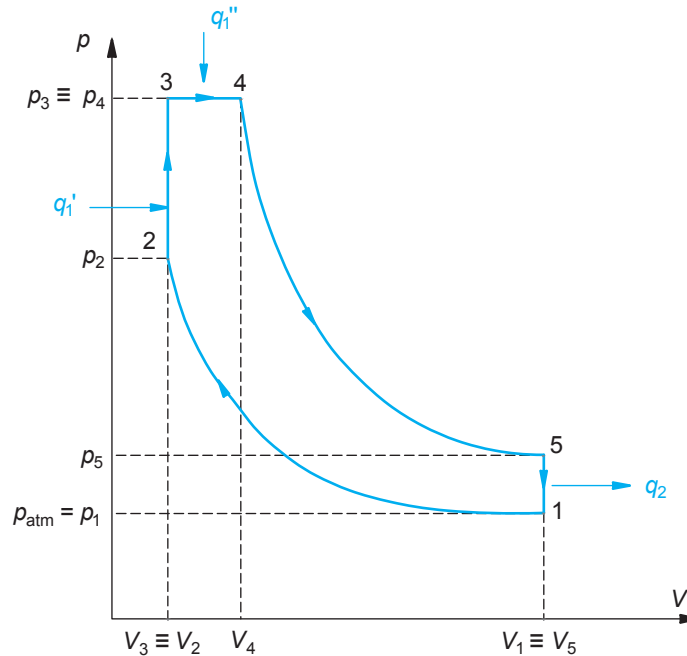


Dimostrazione della formula del rendimento del ciclo Sabathé:

$$\eta_{\text{Sabathé}} = 1 - \frac{1}{\rho_{\text{compr}}^{(k-1)}} \cdot \frac{\tau \cdot \sigma^k - 1}{(\tau - 1) + k \cdot \tau \cdot (\sigma - 1)}$$

Il *ciclo Sabathé* è un ciclo misto nel quale la combustione avviene in parte a volume costante e in parte a pressione costante (**Figura 1**).

Figura 1
Ciclo Sabathé.



Il ciclo Sabathé è composto dalle seguenti trasformazioni termodinamiche, in successione:

- una compressione adiabatica, cioè senza scambi di calore tra il fluido e l'ambiente esterno (tratto 1-2);
- una prima trasformazione isocora, in quanto la prima parte della combustione avviene a volume massico costante (tratto 2-3); nel corso di questa trasformazione il sistema riceve la quantità di calore q_1' , analogamente a quanto avviene nel ciclo Otto;
- una trasformazione isobarica, in quanto la seconda parte della combustione avviene a pressione costante (tratto 3-4); durante questa trasformazione il sistema riceve la quantità di calore q_1'' , analogamente a quanto avviene nel ciclo Diesel;
- un'espansione adiabatica (tratto 4-5);
- una seconda trasformazione isocora (tratto 5-1) durante la quale il sistema cede all'esterno la quantità di calore q_2 .

Complessivamente, la quantità q_1 di calore introdotta nel sistema vale:

$$q_1 = q_1' + q_1''$$

Il calore q_1' ricevuto dal sistema nella trasformazione isocora 2-3 vale:

$$q_1' = c_v \cdot (T_3 - T_2)$$

Il calore q_1'' ricevuto dal sistema nella trasformazione isobarica 3-4 vale:

$$q_1'' = c_p \cdot (T_4 - T_3)$$

La quantità di calore q_2 ceduto nella trasformazione isocora 5-1 vale:

$$q_2 = c_v \cdot (T_5 - T_1)$$

Il rendimento termico ideale del ciclo Sabathé vale:

$$\eta_{\text{Sabathé}} = \frac{\text{calore fornito} - \text{calore sottratto}}{\text{calore fornito}} = \frac{q_1 - q_2}{q_1} = 1 - \frac{q_2}{q_1}$$

ovvero:

$$\eta_{\text{Sabathé}} = 1 - \frac{c_v \cdot (T_5 - T_1)}{c_v \cdot (T_3 - T_2) + c_p \cdot (T_4 - T_3)}$$

Dividiamo numeratore e denominatore della frazione per c_v e otteniamo:

$$\eta_{\text{Sabathé}} = 1 - \frac{(T_5 - T_1)}{(T_3 - T_2) + \frac{c_p}{c_v} \cdot (T_4 - T_3)}$$

Detto $k = \frac{c_p}{c_v}$ = rapporto tra la capacità termica massica a pressione costante c_p e la capacità termica massica a volume costante c_v del fluido trattato, nell'espressione precedente sostituiamo k a $\frac{c_p}{c_v}$; ricaviamo:

$$\eta_{\text{Sabathé}} = 1 - \frac{(T_5 - T_1)}{(T_3 - T_2) + k \cdot (T_4 - T_3)}$$

Questa espressione può anche assumere la forma seguente, utile per i calcoli successivi:

$$\eta_{\text{Sabathé}} = 1 - \frac{T_1 \cdot \left(\frac{T_5}{T_1} - 1 \right)}{T_2 \cdot \left(\frac{T_3}{T_2} - 1 \right) + k \cdot T_3 \cdot \left(\frac{T_4}{T_3} - 1 \right)}$$

Raccogliamo a fattor comune $\frac{T_1}{T_2}$; otteniamo:

$$\eta_{\text{Sabathé}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{\left(\frac{T_5}{T_1} - 1 \right)}{\left(\frac{T_3}{T_2} - 1 \right) + k \cdot \frac{T_3}{T_2} \cdot \left(\frac{T_4}{T_3} - 1 \right)}$$

Nella trasformazione 2-3 a volume costante si ha:

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{p_3}{p_2}$$

Nella trasformazione 3-4 a pressione costante si ha:

$$\frac{T_4}{T_3} = \frac{V_4}{V_3}$$

Nella compressione adiabatica 1-2 si ha:

$$T_1 = T_2 \cdot \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{(k-1)} \quad (1) \quad \rightarrow \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{(k-1)}$$

Nell'espansione adiabatica 4-5 si ha:

$$T_5 = T_4 \cdot \left(\frac{V_4}{V_5} \right)^{(k-1)} \quad (2) \quad \rightarrow \quad \frac{T_5}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_5} \right)^{(k-1)}$$

Se dividiamo membro a membro l'espressione (2) con la (1) risulta:

$$\frac{T_5}{T_1} = \frac{T_4 \cdot \left(\frac{V_4}{V_5} \right)^{(k-1)}}{T_2 \cdot \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{(k-1)}}$$

Questa espressione può anche scriversi, se si moltiplica e si divide per T_3 il secondo membro:

$$\frac{T_5}{T_1} = \frac{T_4}{T_3} \cdot \frac{T_3}{T_2} \cdot \frac{\left(\frac{V_4}{V_5} \right)^{(k-1)}}{\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{(k-1)}} \quad (3)$$

Dato che è:

$$\begin{aligned} V_3 &= V_2; & V_5 &= V_1 \\ \frac{T_3}{T_2} &= \frac{p_3}{p_2}; & \frac{T_4}{T_3} &= \frac{V_4}{V_3} \end{aligned}$$

la relazione (3) diventa:

$$\frac{T_5}{T_1} = \frac{T_4}{T_3} \cdot \frac{T_3}{T_2} \cdot \frac{\left(\frac{V_4}{V_5} \right)^{(k-1)}}{\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{(k-1)}} = \frac{V_4}{V_3} \cdot \frac{p_3}{p_2} \cdot \frac{\left(\frac{V_4}{V_1} \right)^{(k-1)}}{\left(\frac{V_3}{V_1} \right)^{(k-1)}} = \frac{V_4}{V_3} \cdot \frac{p_3}{p_2} \cdot \left(\frac{V_4}{V_2} \right)^{(k-1)}$$

ovvero:

$$\frac{T_5}{T_1} = \frac{V_4}{V_3} \cdot \frac{p_3}{p_2} \cdot \frac{\left(\frac{V_4}{V_2} \right)^k}{\frac{V_4}{V_2}} = \frac{p_3}{p_2} \cdot \left(\frac{V_4}{V_2} \right)^k$$

Se sostituiamo le espressioni precedenti nella formula del rendimento termico ideale otteniamo:

$$\begin{aligned} \eta_{\text{Sabathé}} &= 1 - \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{\left(\frac{T_5}{T_1} - 1 \right)}{\left(\frac{T_3}{T_2} - 1 \right) + k \cdot \frac{T_3}{T_2} \cdot \left(\frac{T_4}{T_3} - 1 \right)} = \\ &= 1 - \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{(k-1)} \cdot \frac{\frac{p_3}{p_2} \cdot \left(\frac{V_4}{V_2} \right)^k - 1}{\left(\frac{p_3}{p_2} - 1 \right) + k \cdot \frac{p_3}{p_2} \cdot \left(\frac{V_4}{V_3} - 1 \right)} \end{aligned}$$

Se indichiamo con:

$$- \rho_{\text{compr}} = \frac{V_1}{V_2} = \text{rapporto volumetrico di compressione};$$

$$- \sigma = \frac{V_4}{V_3} = \frac{V_4}{V_2} = \text{rapporto volumetrico di combustione a pressione costante};$$

$$- \tau = \frac{p_3}{p_2} = \text{rapporto di combustione a volume costante};$$

l'espressione finale del rendimento termico ideale del ciclo Sabathé diviene:

$$\begin{aligned} \eta_{\text{Sabathé}} &= 1 - \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{(k-1)} \cdot \frac{\frac{p_3}{p_2} \cdot \left(\frac{V_4}{V_2} \right)^k - 1}{\left(\frac{p_3}{p_2} - 1 \right) + k \cdot \frac{p_3}{p_2} \cdot \left(\frac{V_4}{V_3} - 1 \right)} = \\ &= 1 - \frac{1}{\rho_{\text{compr}}^{(k-1)}} \cdot \frac{\tau \cdot \sigma^k - 1}{(\tau - 1) + k \cdot \tau \cdot (\sigma - 1)} \end{aligned}$$

ovvero:

$$\eta_{\text{Sabathé}} = 1 - \frac{1}{\rho_{\text{compr}}^{(k-1)}} \cdot \frac{\tau \cdot \sigma^k - 1}{(\tau - 1) + k \cdot \tau \cdot (\sigma - 1)} \quad (4)$$