

Dimostrazione delle espressioni delle velocità finali v'_1 e v'_2 di due corpi dopo un urto elastico:

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2) \cdot v_1 + 2 \cdot m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v'_2 = \frac{(m_2 - m_1) \cdot v_2 + 2 \cdot m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}$$

Nell'urto elastico, oltre alla conservazione delle quantità di moto, si conservano anche le energie cinetiche dei corpi che vengono a contatto.

Metteremo pertanto a sistema l'espressione del teorema della conservazione della quantità di moto:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v'_1 + m_2 \cdot v'_2 \quad (1)$$

con l'espressione della conservazione dell'energia cinetica:

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v'^2_1 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v'^2_2 \quad (2)$$

L'espressione (1) può anche scriversi:

$$m_1 \cdot (v_1 - v'_1) = m_2 \cdot (v'_2 - v_2) \quad (3)$$

mentre la (2), con opportune semplificazioni, diventa:

$$m_1 \cdot (v_1^2 - v'^2_1) = m_2 \cdot (v'^2_2 - v_2^2) \quad (4)$$

Se si divide membro a membro la (4) per la (3) si ottiene:

$$\frac{m_1 \cdot (v_1^2 - v'^2_1)}{m_1 \cdot (v_1 - v'_1)} = \frac{m_2 \cdot (v'^2_2 - v_2^2)}{m_2 \cdot (v'_2 - v_2)}$$

o anche, dopo opportune semplificazioni:

$$\frac{(v_1 - v'_1) \cdot (v_1 + v'_1)}{(v_1 - v'_1)} = \frac{(v'_2 - v_2)(v'_2 + v_2)}{(v'_2 - v_2)}$$

da cui:

$$v_1 + v'_1 = v'_2 + v_2$$

Se si isola v'_1 si ha:

$$v'_1 = v'_2 + v_2 - v_1 \quad (5)$$

che, sostituito nella (3), dà luogo all'espressione:

$$m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot (v'_2 + v_2 - v_1) = m_2 \cdot (v'_2 - v_2)$$

Se si esegue la moltiplicazione e si sommano i termini uguali, risulta:

$$2 \cdot m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot v_2 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v'_2 - m_2 \cdot v'_2$$

da cui, se si isola v'_2 :

$$v'_2 = \frac{2 \cdot m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot v_2 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

La relazione precedente può scriversi:

$$v_2' = \frac{2 \cdot m_1 \cdot v_1 - v_2 \cdot (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$

o anche:

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1) \cdot v_2 + 2 \cdot m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2} \quad (6)$$

Se si sostituisce l'espressione (6) nella (5) si ricava:

$$v_1' = \frac{(m_2 - m_1) \cdot v_2 + 2 \cdot m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2} + v_2 - v_1$$

da cui, se si sommano i termini uguali, risulta:

$$v_1' = \frac{2 \cdot m_2 \cdot v_2 - v_1 \cdot (m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$$

o anche:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) \cdot v_1 + 2 \cdot m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \quad (7)$$