

Dimostrazione della formula dell'energia cinetica e del teorema delle forze vive (o teorema dell'energia cinetica)

Dimostrazione della formula dell'energia cinetica: $L = E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$

Un corpo di massa m posto a un'altezza h rispetto a un generico piano orizzontale di riferimento (**Figura 1**) e libero di cadere, può produrre, com'è noto, un lavoro L pari a:

$$L = P \cdot h$$

dove con P si è indicato il peso del corpo ($P = m \cdot g$).

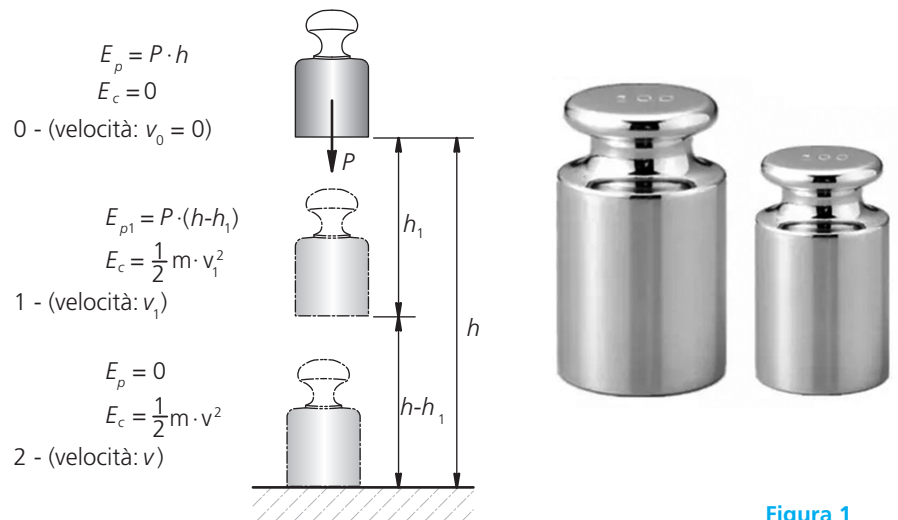


Figura 1

Di conseguenza, possiamo dire che il corpo ha un'energia potenziale di posizione E_p che vale:

$$E_p = P \cdot h$$

Durante la caduta, l'energia potenziale di posizione diminuisce in quanto si riduce a poco a poco l'altezza di caduta. Nello stesso tempo il corpo, che cade con partenza da fermo, con moto naturalmente accelerato, aumenta la sua velocità. Quando il corpo ha percorso uno spazio h_1 , ha compiuto un lavoro:

$$L_1 = P \cdot h_1 \quad (1)$$

Lo spazio percorso h_1 vale:

$$h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad (2)$$

Se si sostituisce l'espressione (2) nella (1) si ottiene:

$$L_1 = P \cdot \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad (3)$$

Dopo aver percorso lo spazio h_1 il corpo ha un'energia potenziale di posizione E_{p1} che vale:

$$E_{p1} = P \cdot h - P \cdot h_1$$

cioè, dalla (2):

$$E_{p1} = P \cdot h - P \cdot \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad (4)$$

Se applichiamo l'espressione:

$$P = m \cdot g$$

la (4) diventa:

$$E_{p1} = P \cdot h - m \cdot g \cdot \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = P \cdot h - \frac{1}{2} \cdot m \cdot g^2 \cdot t^2 \quad (5)$$

D'altra parte, dato che la velocità posseduta dal corpo in caduta libera dopo il tempo t , con partenza da fermo, è:

$$v = g \cdot t$$

la (5) diventa:

$$E_{p1} = P \cdot h - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

A questo punto è evidente che, per il principio di omogeneità dimensionale, il termine:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

non può che avere le dimensioni di un'energia, quindi di un lavoro. Questo termine rappresenta perciò l'energia che il corpo possiede in un certo istante, in un generico punto della traiettoria di caduta in corrispondenza del quale ha raggiunto una velocità v .

Questa forma di energia dipende sia dalla massa del corpo, sia dalla velocità che il corpo ha acquisito in un certo istante e corrisponde sia al lavoro necessario per portare un corpo di massa m , inizialmente in quiete, alla velocità v , sia al lavoro che dovrà essere speso per riportarlo nella situazione iniziale di velocità nulla. A questo termine si dà il nome di *energia cinetica*.

In alternativa alla precedente dimostrazione, si potrebbe considerare, anziché un corpo in caduta libera, un corpo di massa m inizialmente fermo, al quale venga applicata una forza F di intensità costante. Esso si sposterà allora con moto uniformemente accelerato percorrendo nel tempo t lo spazio s . La forza applicata abbia la stessa direzione e lo stesso verso della velocità che il corpo acquisisce.

La forza applicata produce un lavoro L dato dall'espressione:

$$L = F \cdot s \quad (6)$$

Utilizziamo ora sia la relazione della seconda legge della dinamica:

$$F = m \cdot a \quad (7)$$

dove a è l'accelerazione, costante, acquisita dal corpo, sia la formula:

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad (8)$$

che esprime lo spazio percorso dopo un tempo t da un corpo in moto uniformemente accelerato con velocità iniziale nulla. Se si sostituiscono le espressioni (7) e (8) nella (6) si ricava:

$$L = (m \cdot a) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \right) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot a^2 \cdot t^2 \quad (9)$$

La velocità finale v raggiunta dopo un tempo t dal corpo in moto uniformemente accelerato con velocità iniziale nulla vale:

$$v = a \cdot t \quad (10)$$

Se si inserisce la (10) nella (9) si ottiene infine:

$$L = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

che è l'espressione del lavoro che è capace di compiere un corpo di massa m inizialmente in quiete, che, spinto da una forza, ha raggiunto in un certo istante la velocità v . Tale espressione rappresenta quindi l'energia che un generico corpo possiede quando ha raggiunto la velocità v . A questo termine si dà il nome, come s'è detto in precedenza, di *energia cinetica*.

Dimostrazione della formula del teorema delle forze vive

(o teorema dell'energia cinetica): $L = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$

Se il corpo inizialmente non è in quiete ma ha una velocità iniziale v_0 (e quindi è: $v_0 \neq 0$), le espressioni (8) e (10) diventano rispettivamente:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad (8')$$

e:

$$v - v_0 = a \cdot t \quad (10')$$

L'espressione (9) allora si modifica nella relazione:

$$L = (m \cdot a) \cdot \left(v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \right) = m \cdot a \cdot v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot m \cdot a^2 \cdot t^2 \quad (9')$$

Se si inserisce la (10') nella (9') si ottiene infine:

$$L = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$$

Quest'ultima relazione esprime matematicamente il cosiddetto *teorema delle forze vive* (o *teorema dell'energia cinetica*).