

## 1 Relazioni per il moto rototraslatorio dei corpi cilindrici

### 1.1 Dimostrazione dell'espressione:

$$a_{\text{cil.}} = \frac{2}{3} g \cdot \sin \alpha$$

Consideriamo un cilindro di massa  $m$  e raggio  $r$  che scende per effetto del suo peso lungo un piano inclinato avente angolo d'inclinazione  $\alpha$  (Figura 1).

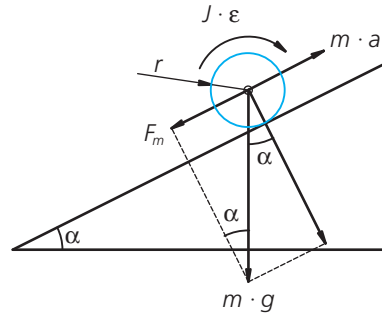


Figura 1

Il moto del cilindro lungo il piano è di tipo sia rotatorio sia traslatorio. Se trascuriamo gli attriti, in base al principio di D'Alembert, si ha:

$$F_m \cdot r - m \cdot a_{\text{cil.}} \cdot r - J \cdot \epsilon = 0 \quad (1)$$

dove:

$F_m \cdot r$  = momento motore;

$m \cdot a_{\text{cil.}} \cdot r$  = momento dovuto alla forza d'inerzia  $m \cdot a_{\text{cil.}}$ .

In questo caso è:

$$F_m = m \cdot g \cdot \sin \alpha \quad (2)$$

Per il moto rotatorio vale la seguente espressione:

$$\epsilon = \frac{a_{\text{cil.}}}{r} \quad (3)$$

Il momento d'inerzia assiale di massa  $J$  di un cilindro vale (si veda l'Approfondimento 11.9):

$$J = \frac{m \cdot r^2}{2} \quad (4)$$

Se inseriamo nella (1) le formule (2), (3) e (4) ricaviamo l'espressione:

$$(m \cdot g \cdot \sin \alpha) \cdot r - m \cdot a_{\text{cil.}} \cdot r - \frac{m \cdot r^2}{2} \cdot \frac{a_{\text{cil.}}}{r} = 0$$

da cui, dopo opportune semplificazioni, si ottiene la relazione:

$$a_{\text{cil.}} = \frac{2}{3} g \cdot \sin \alpha$$

Se confrontiamo tra loro queste ultime due espressioni ci rendiamo conto che la diminuzione dell'accelerazione del corpo cilindrico, che trasla e contemporaneamente ruota, è causata unicamente dal moto che si è aggiunto a quello di traslazione, cioè il moto di rotazione. Più precisamente: è causata dall'inerzia alla rotazione.

$$a = g \cdot \sin \alpha$$

## 1.2 Calcolo del raggio d'inerzia di un cilindro

Ci proponiamo di calcolare il valore del raggio giratore di un cilindro di massa  $m$  e raggio di base  $r$ .

Dalla Tabella 1 dell'Approfondimento 11.9 ricaviamo l'espressione del momento d'inerzia assiale di massa  $J$  di un cilindro:

$$J_z = \frac{m \cdot r^2}{2} \quad (5)$$

L'espressione generica del raggio d'inerzia è:

$$\rho_z = \sqrt{\frac{J_z}{m}} \quad (6)$$

Se inseriamo la (5) nella (6) otteniamo:

$$\rho_z = \sqrt{\frac{J_z}{m}} = \sqrt{\frac{m \cdot r^2}{2 \cdot m}} = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r \cdot \sqrt{2}}{2}$$

Viceversa, se immaginiamo di concentrare tutta la massa  $m$  del cilindro in un punto P (**Figura 2**) posto a distanza dall'asse  $z$  pari a  $\rho_z = \frac{r}{\sqrt{2}}$ , il valore di  $J_z$  risulta pari a  $\frac{m \cdot r^2}{2}$ .

