

Moto circolare uniforme: dimostrazione delle formule della velocità periferica, della velocità angolare, dell'accelerazione centripeta

a) Velocità periferica v

Quando un punto P_1 posto sulla periferia di un corpo in rotazione descrive una traiettoria circolare di raggio r e percorre in un giro uno spazio $l = 2 \cdot \pi \cdot r$, corrispondente alla lunghezza dell'intera circonferenza, ciò equivale a dire che il corpo ha compiuto 1 giro. Se il corpo compie 1 giro in 1 minuto, il punto P_1 percorre lo spazio l in 1 minuto. Ma se il corpo compie N giri in 1 minuto, ovviamente il punto P_1 percorre, in 1 minuto, N volte lo spazio l , cioè compie in 1 minuto lo spazio:

$$s_1 = N \cdot l = N \cdot 2\pi \cdot r$$

con una velocità periferica v_1 (in m/min) pari a:

$$v_1 = \frac{s_1}{t} = \frac{N \cdot l}{t} = \frac{N \cdot 2\pi \cdot r}{t} = 2\pi \cdot r \cdot n \quad [\text{m/min}]$$

dove con n si è indicato il rapporto $\frac{N}{t}$, cioè il numero di giri N compiuti nell'unità di tempo t di 1 minuto.

Questa velocità, misurata in m/s, sarà 1/60esimo del valore calcolato in precedenza, dato che è $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$, cioè sarà espressa dalla relazione:

$$v = \frac{2\pi \cdot r \cdot n}{60} \quad [\text{m/s}]$$

b) Velocità angolare ω

Per quanto riguarda la velocità angolare ω , occorre tener presente che se in 1 minuto viene compiuto 1 giro, viene anche descritto, in 1 minuto, un angolo al centro $\alpha_1 = 2 \cdot \pi$ radianti.

In N giri compiuti in 1 minuto verrà descritto, sempre in 1 minuto, l'angolo:

$$\alpha = N \cdot \alpha_1 = N \cdot 2\pi$$

con una velocità angolare pari a:

$$\omega = \frac{\alpha}{t} = \frac{N \cdot \alpha_1}{t} = \frac{2\pi \cdot n}{t} = 2\pi \cdot n \quad [\text{rad/min}]$$

dove con n si è indicato il rapporto $\frac{N}{t}$, cioè il numero di giri N compiuti nell'unità di tempo t di 1 minuto.

Tale velocità, misurata in rad/s, sarà 1/60esimo del valore calcolato in precedenza, in quanto è $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$, cioè sarà espressa dalla relazione:

$$\omega = \frac{2\pi \cdot n}{60} \quad [\text{rad/s}]$$

c) Accelerazione centripeta a_c

Il punto mobile (**Figura 1a**) si sposta con moto circolare uniforme sulla circonferenza di centro O e raggio r , dalla posizione P_1 alla posizione P_2 e percorre in un tempo t l'arco P_1P_2 di lunghezza s .

Il vettore velocità periferica v mantiene costante la sua intensità e nello spostamento del punto mobile dalla posizione P_1 alla posizione P_2 cambia direzione. Indichiamo con v_1 il vettore velocità in corrispondenza del punto P_1 e con v_2 il vettore velocità in corrispondenza del punto P_2 e costruiamo a parte, con il metodo del parallelogramma dei vettori, la differenza vettoriale tra questi due vettori.

Essa è rappresentata dal vettore $v_2 - v_1$ (**Figura 1b**).

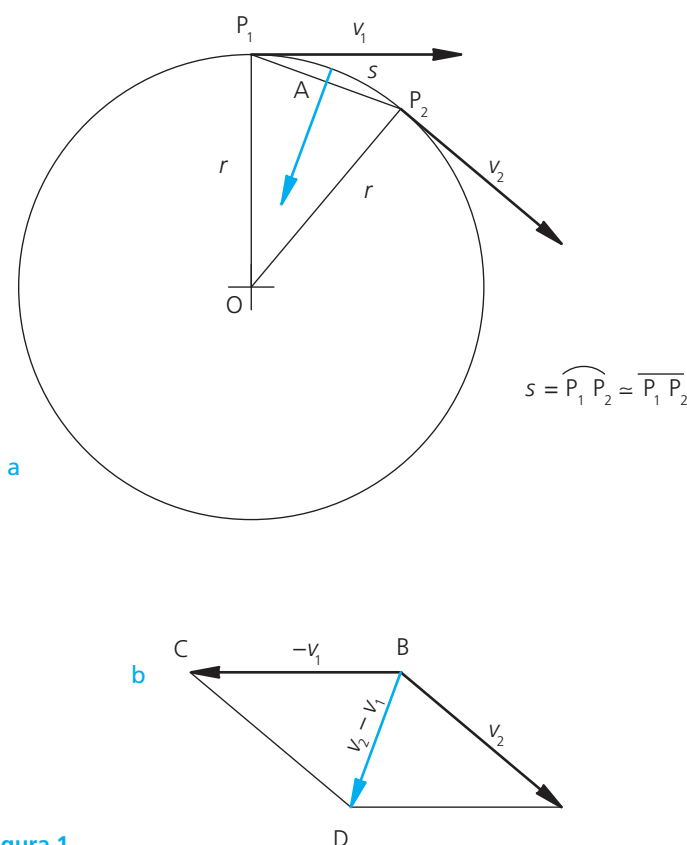


Figura 1

Dividiamo tale differenza per il tempo t impiegato dal punto mobile per spostarsi dalla posizione P_1 alla posizione P_2 . Si ottiene il rapporto:

$$\frac{v_2 - v_1}{t}$$

Tale rapporto, come è noto, rappresenta un'accelerazione. Chiameremo questa accelerazione *accelerazione centripeta* a_c . Scriveremo pertanto:

$$a_c = \frac{v_2 - v_1}{t}$$

L'accelerazione centripeta, come vedremo, è un vettore applicato nel punto medio dell'arco P_1P_2 , ha direzione radiale ed è orientata in modo centripeto, cioè verso il centro O della circonferenza.

Se supponiamo che l'arco P_1P_2 sia sufficientemente piccolo da potersi confon-

dere con la corda P_1P_2 , il settore circolare P_1OP_2 può essere considerato assimilabile al triangolo P_1OP_2 .

Questo triangolo risulta simile al triangolo BCD , perché sono entrambi triangoli isosceli e hanno i rispettivi lati obliqui perpendicolari tra loro.

Sono entrambi triangoli isosceli perché:

- i lati obliqui del primo sono raggi della circonferenza di centro O ;
- i lati obliqui del secondo sono entrambi rappresentati dal vettore velocità v , la cui intensità resta costante.

Hanno i lati perpendicolari tra loro in quanto:

- P_1O è perpendicolare al vettore v_1 ;
- P_2O è perpendicolare al vettore v_2 .

Si ricordi, a questo proposito, che due angoli sono congruenti sia se hanno i lati a due a due tra loro paralleli, sia se hanno i lati a due a due tra loro perpendicolari.

Possiamo quindi scrivere la proporzione:

$$BD : CB = P_1P_2 : OP_1$$

ossia:

$$(v_2 - v_1) : v = s : r$$

Da tale proporzione ricaviamo:

$$v_2 - v_1 = \frac{s \cdot v}{r}$$

Se dividiamo ambo i membri per t otteniamo:

$$\frac{v_2 - v_1}{t} = \frac{s}{t} \cdot \frac{v}{r}$$

Dal momento che è:

$$\frac{v_2 - v_1}{t} = a_c$$

e:

$$\frac{s}{t} = v$$

si ricava:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

Dato che è:

$$v = \omega \cdot r$$

risulta:

$$a_c = \omega^2 \cdot r$$

o anche:

$$a_c = \omega \cdot v$$

La direzione del vettore accelerazione è, come s'è detto, centripeta perché tale vettore risulta perpendicolare alla corda P_1P_2 nel suo punto medio A e quindi è orientato verso il centro O della circonferenza.