

Energia cinetica nei moti rotatori

Dimostrazione della formula dell'energia cinetica di rotazione:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot J_z \cdot \omega^2$$

Supponiamo che un corpo rigido posto in rotazione attorno a un generico asse z (Figura 1) sia costituito da un insieme di numerosissime masse elementari m_i poste ciascuna a distanza r_i dall'asse di rotazione.

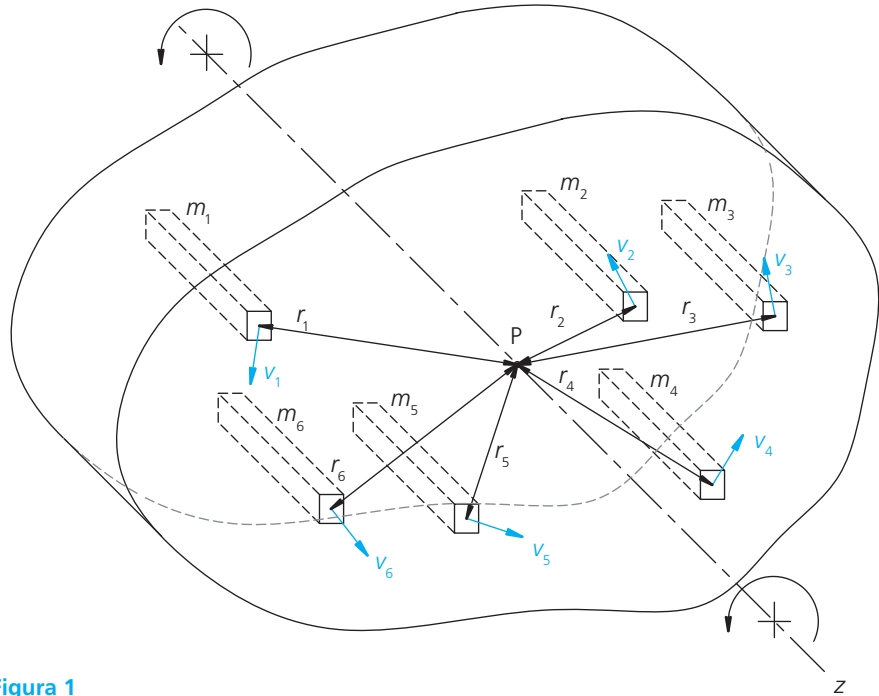


Figura 1

L'energia cinetica E_{ci} di ciascuna di queste masse può essere espressa dalla relazione:

$$E_{ci} = \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v_i^2 \quad (1)$$

dove v_i rappresenta la velocità periferica di ciascuna massa elementare. Ciascuna massa i -esima, nel suo moto, descrive una traiettoria circolare di raggio r_i con velocità angolare ω ; la sua velocità periferica v_i vale perciò:

$$v_i = \omega \cdot r_i \quad (2)$$

Se si sostituisce la (2) nella (1) si ricava:

$$E_{ci} = \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot \omega^2 \cdot r_i^2$$

Per calcolare l'energia cinetica complessiva E_c del corpo rigido in rotazione, eseguiamo la sommatoria delle energie cinetiche E_{ci} , estesa a tutte le masse elementari che costituiscono il corpo. Otteniamo:

$$E_c = \sum_i \left(\frac{1}{2} \cdot m_i \cdot \omega^2 \cdot r_i^2 \right) \quad (3)$$

Dal momento che tutte le masse componenti un corpo rigido in rotazione hanno la stessa velocità angolare, ovvero è:

$$\omega = \text{costante}$$

l'espressione (3) può anche essere scritta:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \sum_i (m_i \cdot r_i^2)$$

Il termine:

$$\sum_i (m_i \cdot r_i^2)$$

rappresenta il momento d'inerzia assiale di massa J_z del corpo, calcolato rispetto all'asse di rotazione z . Risulta quindi:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot J_z \cdot \omega^2$$

Tale espressione rappresenta l'energia cinetica di un corpo rigido in rotazione attorno a un generico asse z con velocità angolare istantanea ω .

Dato che si tratta di una grandezza omogenea con il lavoro, l'energia cinetica viene misurata in joule (J).

Dimostrazione dell'affermazione che il lavoro sviluppato da una coppia motrice M si converte in energia cinetica di rotazione

Un generico corpo rigido di massa m , inizialmente in quiete, abbia la possibilità di ruotare attorno a un asse. Se sollecitiamo questo solido con un momento M per un intervallo di tempo t , esso viene posto in rotazione attorno all'asse considerato e aumenta progressivamente la sua velocità angolare fino al raggiungimento di un generico valore finale ω_{finale} .

Il lavoro L che ha compiuto il momento motore vale:

$$L = M \cdot \alpha \quad (4)$$

dove con α si è indicato l'angolo di cui è ruotato il corpo nel tempo t , con moto uniformemente accelerato.

In base alla seconda legge della dinamica per i moti rotatori:

$$M = J \cdot \varepsilon$$

(dove con ε si è indicata l'accelerazione angolare, costante, subita dal corpo) e all'espressione dell'angolo α descritto nel tempo t in un moto circolare uniformemente accelerato con partenza da fermo:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot t^2$$

la (4) diventa:

$$L = M \cdot \alpha = J \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot t^2$$

o anche:

$$L = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \varepsilon^2 \cdot t^2 \quad (5)$$

Dato che è:

$$\omega = \varepsilon \cdot t$$

la (5) diventa:

$$L = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2 \quad (6)$$

Possiamo concludere, quindi, che il lavoro sviluppato dal momento motore M sul corpo inizialmente in quiete si è convertito in energia cinetica di rotazione.