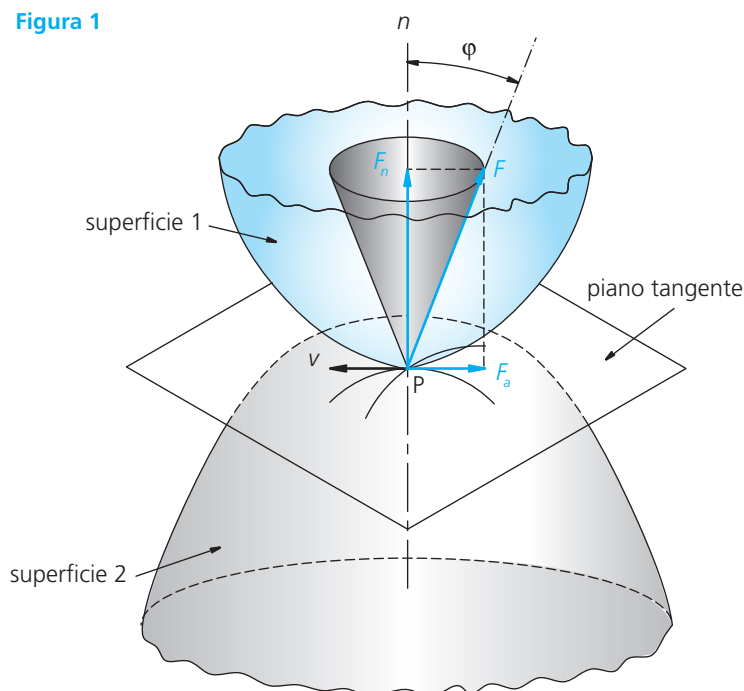


## 1 Il cono d'attrito

Indichiamo con P il punto di contatto di due generiche superfici che strisciano una sull'altra e con  $F$  la risultante tra  $F_a$  e  $F_n$  (**Figura 1**).

La forza d'attrito  $F_a$  può assumere una direzione qualunque perché le due superfici possono strisciare una sull'altra, sul piano tangente, in una direzione qualunque. Al variare della direzione di  $F_a$  la retta d'azione della risultante  $F$  descrive un cono (*cono d'attrito*) attorno alla verticale  $n$  passante per P.

Figura 1



Detto  $\phi$  (*angolo di attrito*) l'angolo compreso tra  $F$  e  $F_n$ , le forze  $F_a$  e  $F_n$  sono legate tra loro dalla relazione:

$$\frac{F_a}{F_n} = \operatorname{tg} \phi$$

Questa relazione può scriversi:

$$F_a = F_n \cdot \operatorname{tg} \phi \quad (1)$$

Se si confronta la formula della forza d'attrito radente:

$$F_a = f \cdot F_n$$

con la (1) si ricava:

$$f = \operatorname{tg} \phi$$

Cioè: il coefficiente d'attrito  $f$  è uguale alla tangente dell'angolo di attrito  $\phi$ . Avremo quindi:

– per:  $f_s = \operatorname{tg} \phi_s$  ( $\phi_s$  = *angolo d'attrito statico*):

$$\text{forza d'attrito statica } F_a: F_a = F_n \cdot \operatorname{tg} \phi_s$$

– per:  $f_c = \operatorname{tg} \phi_c$  ( $\phi_c$  = *angolo d'attrito cinetico*):

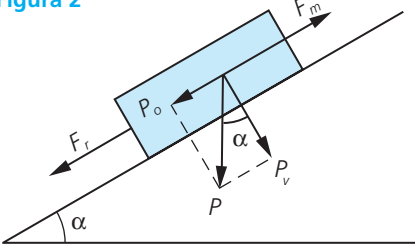
$$\text{forza d'attrito cinetica } F_c: F_c = F_n \cdot \operatorname{tg} \phi_c$$

## 2 Corpo prismatico su un piano inclinato

Si consideri ora il moto di un corpo di forma prismatica, avente peso  $P$ , posto su un piano inclinato con angolo d'inclinazione  $\alpha$ .

I casi che ci si possono presentare sono i seguenti:

Figura 2



### a) Moto ascendente

Con riferimento alla **Figura 2**, sia  $P_v$  la componente del peso  $P$  perpendicolare al piano di strisciamento. Essa vale:

$$P_v = P \cdot \cos \alpha$$

Indicando con  $F_r$  la forza d'attrito radente e con  $f$  il coefficiente d'attrito, risulta:

$$F_r = f \cdot P_v = f \cdot P \cdot \cos \alpha$$

La componente  $P_o$  del peso  $P$ , parallela al piano, si oppone al moto ascendente del corpo. Essa vale:

$$P_o = P \cdot \sin \alpha$$

Detta  $F_m$  la forza motrice agente parallelamente al piano, se applichiamo il principio di D'Alembert avremo:

$$F_m - P_o - F_r = 0$$

ovvero:

$$F_m - P \cdot \sin \alpha - f \cdot P \cdot \cos \alpha = 0$$

da cui:

$$F_m = P \cdot \sin \alpha + f \cdot P \cdot \cos \alpha$$

Il corpo, se spinto dalla forza motrice  $F_m$  espressa dalla relazione precedente, risalirebbe il piano inclinato con moto uniforme.

Se il moto del corpo fosse *accelerato* sarebbe presente anche la forza d'inerzia  $F_i$  a ostacolare la salita, per cui sarebbe necessaria una forza motrice  $F_m$  data dalla relazione:

$$F_m = F_r + P_o + F_i$$

e avente quindi un'intensità maggiore di quella che realizza il moto uniforme.

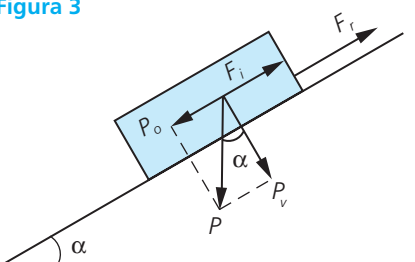
Quando il corpo sale con moto uniformemente accelerato, la sua accelerazione  $a$ , costante, può essere calcolata applicando il principio di D'Alembert:

$$F_m - P \sin \alpha - f \cdot P \cos \alpha - m \cdot a = 0$$

Da questa relazione, con  $P = m \cdot g$ , si ricava:

$$a = \frac{F_m}{m} - g \sin \alpha - f \cdot g \cos \alpha$$

Figura 3



### b) Moto discendente (**Figura 3**)

Il corpo scende spinto dalla forza  $P_o$ , diventata forza motrice in assenza della forza  $F_m$ .

Se la componente  $P_o$  risulta maggiore della forza d'attrito  $F_r$ , ovvero se risulta:

$$P \cdot \sin \alpha > f \cdot P \cdot \cos \alpha$$

con:

$$P_o = P \cdot \sin \alpha$$

e:

$$F_r = f \cdot P \cdot \cos \alpha$$

il corpo scende con moto accelerato. Si origina quindi una forza d'inerzia  $m \cdot a$ . Applicando il principio di D'Alembert, si ottiene:

$$P \sin \alpha - f \cdot P \cos \alpha - m \cdot a = 0$$

da cui si ricava:

$$a = g \cdot (\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

c) *Il corpo resta fermo*

Se invece si verifica la condizione:

$$P_o < F_r \quad \text{da cui:} \quad P \sin \alpha < f \cdot P \cos \alpha$$

il corpo rimane in quiete perché la forza  $F_r$  è una forza passiva e come tale non è in grado di generare il moto di salita del corpo.

d) *Corpo in quiete o discendente con moto uniforme*

Quando infine la forza motrice  $P_o$ , che favorisce la discesa del corpo, e la forza resistente  $F_r$  sono uguali e opposte, si ha:

$$P_o = F_r \quad \text{da cui:} \quad P \sin \alpha = f \cdot P \cos \alpha$$

In queste condizioni si può avere una situazione di *equilibrio statico* per cui, se il corpo è in quiete, rimane fermo, oppure una situazione di *equilibrio dinamico* per cui, se il corpo scende lungo il piano, il suo moto è *uniforme*.

In quest'ultimo caso la precedente relazione:

$$P \sin \alpha = f \cdot P \cos \alpha$$

diviene:

$$\sin \alpha = f \cdot \cos \alpha$$

da cui si ricava:

$$f = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

L'espressione ora ottenuta permette di confrontare il coefficiente di attrito  $f$  e la pendenza del piano inclinato  $\tan \alpha$  e stabilire così in base a quali condizioni il corpo scenderà o meno lungo il piano stesso per effetto del proprio peso.

Il cono d'attrito è quel cono avente per asse geometrico la retta  $n$  normale alle due superfici a contatto e le cui generatrici sono inclinate dell'angolo d'attrito  $\varphi$  rispetto alla retta  $n$ . Possiamo affermare che:

- Se la retta d'azione del peso  $P$  coincide con una generatrice del cono d'attrito (**Figura 4a**), ovvero se:

$$\alpha = \varphi$$

e quindi:

$$\tan \alpha = \tan \varphi$$

il corpo scende con moto uniforme.

- Se la retta d'azione del peso  $P$  è esterna al cono d'attrito (**Figura 4b**), ovvero se:

$$\alpha > \varphi$$

e quindi:

$$\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \varphi$$

il corpo scende con moto accelerato. In altre parole: se l'angolo d'inclinazione del piano è maggiore dell'angolo d'attrito, il corpo scende lungo il piano inclinato per effetto del proprio peso; il suo moto sarà un moto accelerato.

- Se la retta d'azione del peso  $P$  è interna al cono d'attrito (Figura 4c), ovvero se:

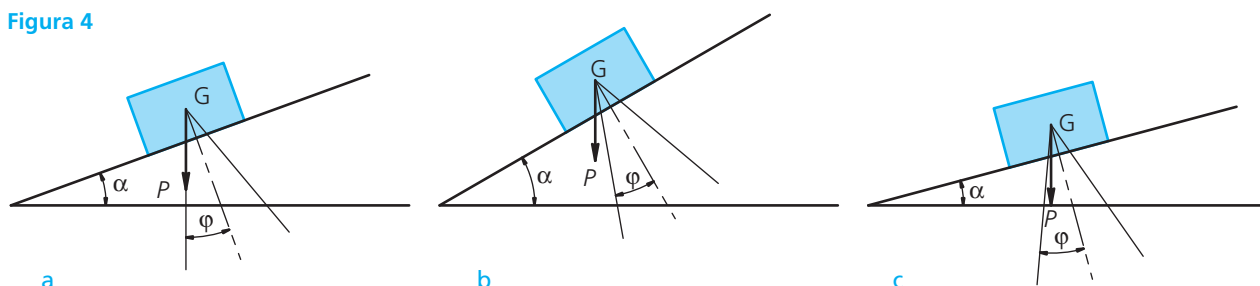
$$\alpha < \varphi$$

e quindi:

$$\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \varphi$$

il moto discendente del corpo non può avvenire spontaneamente.

Figura 4



Un tipico esempio di angolo di attrito è l'inclinazione che assume la sabbia asciutta o la ghiaia o qualunque materiale incoerente quando viene scaricato su un piano orizzontale da una tramoggia (Figura 5). In questo caso l'angolo di attrito viene chiamato *angolo di naturale declivio*.

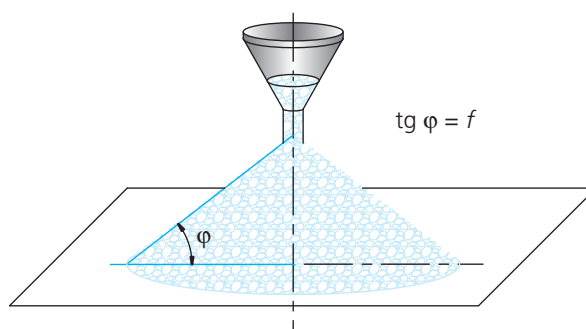


Figura 5

Durante lo scarico del materiale, le particelle che lo compongono, man mano che si ammucchiano, trovano la loro posizione di equilibrio solo quando hanno formato un piano che ha un'inclinazione pari all'angolo di attrito tipico di quel materiale; mentre il mucchio cresce, gli strati di materiale che si sovrappongono mantengono sempre quella stessa inclinazione.