

## Dimostrazione della seconda legge della dinamica per i moti rotatori: $M = J \cdot \varepsilon$

Prendiamo in esame un generico corpo rigido, inizialmente in quiete, avente la possibilità di ruotare attorno a un asse (Figura 1) e supponiamo che esso sia costituito da un insieme di infinite masse elementari  $m_i$  i cui baricentri hanno distanze  $r_i$  dall'asse di rotazione. A ciascuna massa sia applicata una forza elementare  $F_i$  che, per semplicità, supponiamo sia perpendicolare alla distanza radiale  $r_i$  dall'asse considerato; gli infiniti momenti elementari  $M_i$  che così si ottengono produrranno il moto di rotazione desiderato. Ciascuna massa elementare  $m_i$ , per effetto della forza  $F_i$ , descriverà quindi con moto uniformemente accelerato una traiettoria circolare di raggio  $r_i$ . Potremo allora applicare a ogni massa elementare la seconda legge della dinamica.

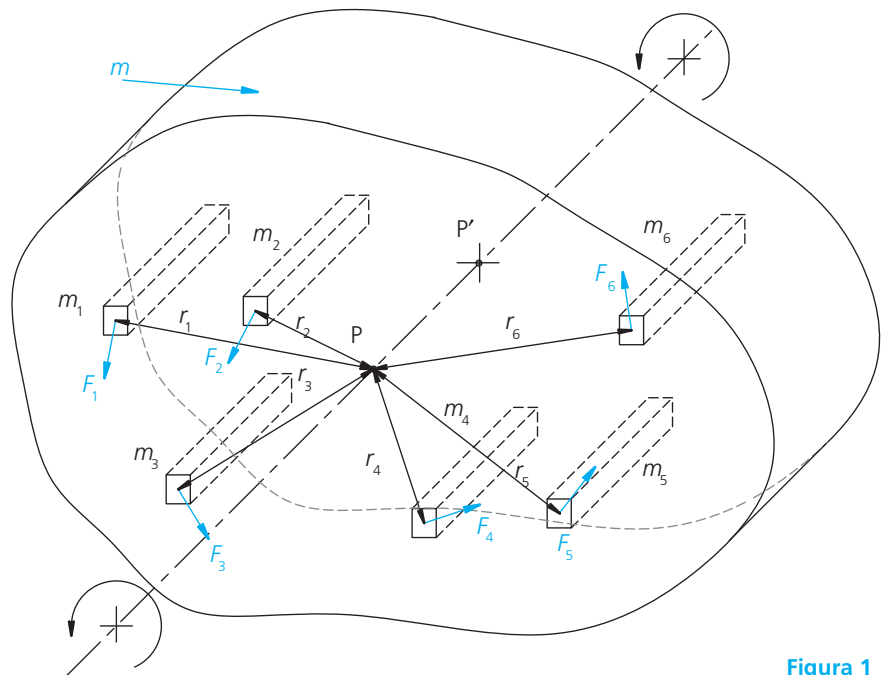


Figura 1

Potremo cioè scrivere:

$$F_i = m_i \cdot a_{i \text{ tang}}$$

dove  $a_{i \text{ tang}}$  rappresenta l'accelerazione tangenziale che la massa  $i$ -esima subisce nel suo moto circolare, accelerazione dovuta alla variazione della sua velocità periferica.

Moltiplicando entrambi i membri di tale espressione per la distanza  $r_i$  del baricentro della massa  $i$ -esima dall'asse di rotazione, otteniamo:

$$F_i \cdot r_i = m_i \cdot r_i \cdot a_{i \text{ tang}} \quad (1)$$

Dato che l'accelerazione tangenziale di un moto circolare può essere espressa anche tramite la relazione:

$$a_{i \text{ tang}} = \varepsilon \cdot r_i$$

dove  $\varepsilon$  è l'accelerazione angolare dovuta alla variazione della velocità angolare  $\omega$ ; l'espressione (1) può allora essere scritta:

$$F_i \cdot r_i = m_i \cdot r_i^2 \cdot \varepsilon \quad (1')$$

Il primo membro di tale uguaglianza rappresenta il momento della forza  $i$ -esima  $F_i$  agente sulla massa puntiforme  $m_i$ ; nel secondo membro compare il termine:

$$m_i \cdot r_i^2$$

cioè il prodotto della massa elementare per il quadrato della sua distanza dall'asse di rotazione. Questo termine, che indicheremo con la lettera  $J_i$ , non è altro che il noto *momento d'inerzia assiale di massa* riferito alla massa elementare  $m_i$ .

Dato che la relazione (1') è valida per ogni massa elementare costituente il solido, possiamo applicarla a ciascuna di esse ed eseguire la sommatoria:

$$\sum_i (F_i \cdot r_i) = \sum_i (m_i \cdot r_i^2 \cdot \varepsilon) \quad (2)$$

Poiché si tratta di un corpo rigido, l'accelerazione angolare  $\varepsilon$ , così come la velocità angolare istantanea  $\omega$ , è la stessa per tutte le masse elementari. Infatti, tutte le masse elementari sono rigidamente vincolate nella loro reciproca posizione e di conseguenza subiscono la stessa accelerazione angolare. Inoltre, dal momento che tale accelerazione è una costante, in quanto  $\varepsilon$  non dipende dalla posizione occupata dalla massa  $i$ -esima, può essere raccolta a fattor comune.

L'espressione (2) potrà quindi essere scritta nella forma:

$$\sum_i (F_i \cdot r_i) = \varepsilon \cdot \sum_i (m_i \cdot r_i^2) \quad (3)$$

dove il termine:

$$\sum_i (F_i \cdot r_i)$$

rappresenta il momento complessivo  $M$ , cioè il momento risultante di tutti i momenti  $M_i$  dovuti alle singole forze agenti ciascuna su ogni massa  $i$ -esima. Questo momento provoca il moto rotatorio dell'intero sistema delle masse elementari  $m_i$  cioè del corpo rigido che di tale sistema di masse è costituito. Porremo quindi:

$$\sum_i (F_i \cdot r_i) = M$$

Il termine:

$$\sum_i (m_i \cdot r_i^2) = \sum_i J_i$$

rappresenta invece il momento d'inerzia assiale di massa complessivo del corpo rigido preso in esame, momento calcolato rispetto all'asse considerato. Se indichiamo con  $J$  questo termine, abbiamo:

$$\sum_i (m_i \cdot r_i^2) = J$$

L'espressione (3) assume pertanto la forma:

$$M = J \cdot \varepsilon \quad (4)$$

La (4) esprime la *seconda legge della dinamica* per i moti rotatori, riferita a un corpo rigido che ruota attorno a un asse fisso.

## Momenti d'inerzia di massa caratteristici

Nella dinamica del moto rotatorio è importante conoscere il momento d'inerzia di massa di un cilindro pieno, di un cilindro cavo e di una sfera, calcolati rispetto al loro asse longitudinale.

Riportiamo quindi, anche per utilità applicativa, le seguenti relazioni.

a) *Momento d'inerzia di massa di un cilindro pieno:*

$$J = m \cdot \frac{r^2}{2}$$

in cui  $m$  è la massa del cilindro, mentre  $r$  è il raggio. La massa  $m$  è data dalla formula:

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot l$$

dove  $\rho$  è la massa volumica del materiale e  $l$  è la lunghezza del cilindro.

Sostituendo la massa  $m$  nella formula del momento d'inerzia di massa del cilindro pieno si ha:

$$J = m \cdot \frac{r^2}{2} = \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot l \cdot \frac{r^2}{2} = \rho \cdot \pi \cdot \frac{r^4}{2} \cdot l$$

Poiché il termine  $\frac{\pi \cdot r^4}{2}$  è il momento d'inerzia polare  $I_O$  rispetto al centro  $O$  di un cerchio (sezione *costante* del cilindro), il calcolo del momento d'inerzia di massa di un corpo cilindrico rispetto al proprio asse può essere in pratica facilmente eseguito con la formula:

$$J = \rho \cdot l \cdot I_O$$

Il momento d'inerzia  $J$  dipende dunque dalla massa e dal raggio del cilindro. Riferendoci allora all'equazione fondamentale  $M = J \cdot \varepsilon$  si nota che, a parità di massa  $m$  del cilindro sottoposto a un momento motore  $M$ , la sua accelerazione  $\varepsilon$  è tanto più elevata quanto minore è il raggio  $r$  e quindi il momento d'inerzia  $J$ .

Nel caso invece si debba fermare un solido cilindrico in moto rotatorio, occorre applicargli un momento resistente tanto più elevato quanto maggiore è il momento d'inerzia  $J$ .

Se poi un solido rotante è soggetto a un certo momento resistente, la sua decelerazione angolare  $\varepsilon$  risulta tanto minore quanto maggiore è il momento d'inerzia  $J$  e quindi il solido impiegherà sempre più tempo per essere bloccato.

b) *Momento d'inerzia di massa di un cilindro cavo calcolato rispetto al suo asse longitudinale:*

$$J = m \cdot \frac{R^2 + r^2}{2}$$

in cui  $m$  è la massa del cilindro e  $R, r$  sono i raggi rispettivamente esterno e interno del cilindro cavo.

Quando la differenza tra i due raggi è piccola e quindi è piccolo anche lo spessore della corona circolare del cilindro cavo rispetto al diametro medio, si può usare la formula approssimata:

$$J = m \cdot r_m^2$$

oppure:

$$J = m \cdot \frac{d_m^2}{4}$$

in funzione rispettivamente del raggio medio  $r_m$  e del diametro medio  $d_m$ .

c) *Momento d'inerzia polare di massa di una sfera rispetto al centro:*

$$J = \frac{2}{5} m \cdot r^2$$

in cui  $m$  è la massa del solido sferico omogeneo di raggio  $r$ .