3.5 Determinazione del baricentro

Il baricentro di un corpo può essere determinato anche in modo sperimentale (*Figura 3.16*). Il corpo viene sospeso al punto A generico: si raggiungerà l'equilibrio quando i momenti delle particelle costituenti il corpo generano un momento orario che bilancia esattamente quelle che provocano un momento antiorario; quando ciò avviene, il baricentro giace lungo la verticale passante per A. Se il corpo viene sospeso a un altro punto B, in condizioni di equilibrio il baricentro si troverà lungo la verticale passante per B. L'intersezione delle linee passanti per A e per B individua la posizione del baricentro G.

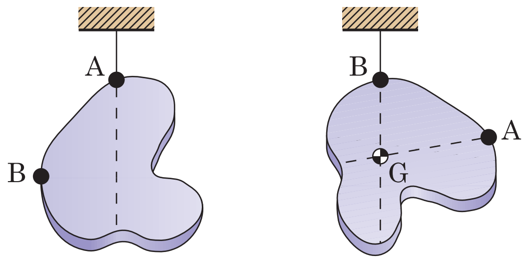

Fig. 3.16 - Determinazione sperimentale del baricentro.

Esempio 3.8 Momenti di inerzia di una sezione a doppia T

La sezione trasversale di una trave ad ali larghe e parallele è alta $h = 360$ mm, larga $b = 300$ mm e ha come spessore dell'anima $a = 12{,}5$ mm e delle ali $e = 22{,}5$ mm (*Figura 3.17-a*). Trascurando il raccordo delle ali con l'anima, determinare:

a) il momento di inerzia rispetto all'asse baricentrico x_0;

b) il momento di inerzia rispetto all'asse baricentrico y_0;

c) i raggi di inerzia baricentrici rispetto agli assi;

d) il momento di inerzia e il raggio di inerzia polari rispetto al baricentro G.

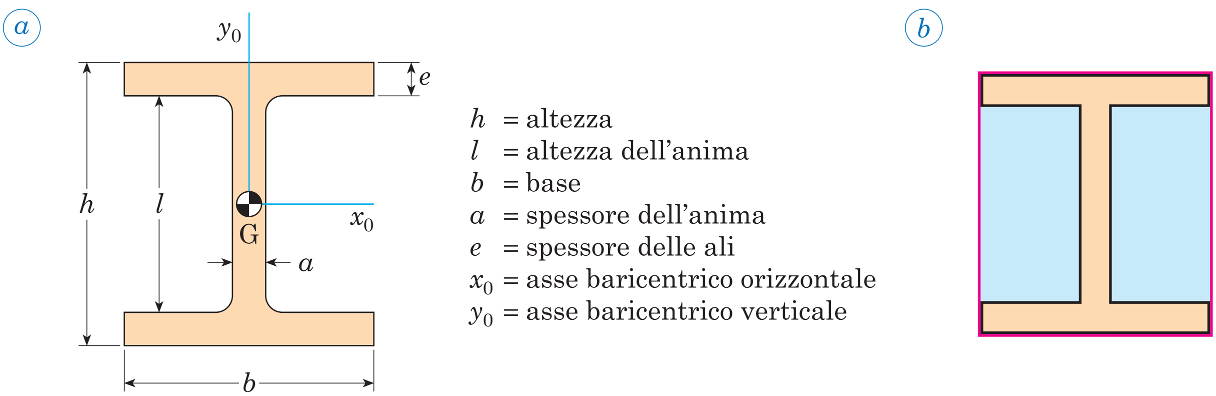

Fig. 3.17 - a) Sezione a doppia T trattata nell'*Esempio 3.8.*

b) Calcolo del momento di inerzia di una sezione a doppia T ottenuta come differenza di un rettangolo pieno e di due rettangoli vuoti.

SOLUZIONE

a) Il momento di inerzia della sezione composta viene calcolato rispetto all'asse x_0. Si considera la sezione a doppia T composta da tre rettangoli: le due ali aventi ciascuna la base $b = 30$ cm e l'altezza $e = 2{,}25$ cm e l'anima avente base $a = 1{,}25$ cm e altezza

$l = h - 2e = 31{,}5$ cm. Si applica quindi il metodo illustrato nell'*Esempio 3.7* che richiede di calcolare per ciascun rettangolo i (con $i = 1, 2, 3$):

– l'area $A_i = b_i h_i$;
– la distanza d_i tra il baricentro di ciascun rettangolo e l'asse rispetto al quale va calcolato il momento di inerzia della sezione composta;
– il momento di inerzia $\overline{I}_i = \left(b_i h_i^3\right)/12$ (*Tabella VII* in fondo al volume) rispetto a un asse x passante per il baricentro di ciascun rettangolo.

In queste formule i simboli b_i e h_i indicano la base e l'altezza di ciascun rettangolo; essi verranno sostituiti dai simboli usati nella *Figura 3.17-a*. La distanza d_{3x0} tra il baricentro dell'anima e l'asse x_0 è uguale a zero perché questo baricentro si trova sull'asse x_0.

$$A_1 = A_2 = be = 30 \text{ cm} \times 2{,}25 \text{ cm} = 67{,}5 \text{ cm}^2$$

$$d_{1x0} = d_{2x0} = \left[\left(36 \text{ cm}\right)/2\right] - \left[\left(2{,}25 \text{ cm}\right)/2\right] = 16{,}9 \text{ cm}$$

$$\overline{I}_{1x} = \overline{I}_{2x} = \frac{be^3}{12} = \frac{\left(30 \text{ cm}\right) \times \left(2{,}25 \text{ cm}\right)^3}{12} = 28{,}5 \text{ cm}^4$$

$$A_3 = al = 1{,}25 \text{ cm} \times 31{,}5 \text{ cm} = 39{,}4 \text{ cm}^2 \qquad \overline{I}_{3x} = \frac{al^3}{12} = \frac{\left(1{,}25 \text{ cm}\right) \times \left(31{,}5 \text{ cm}\right)^3}{12} = 3.255{,}8 \text{ cm}^4$$

Dalla tabella risulta $I_{x0} = 41.870 \text{ cm}^4$ ◀

Parte	A_i [cm^2]	d_{ix0} [cm]	$A_i d_{ix0}^2$ [cm^4]	$\overline{I}_{ix}$ [cm^4]	$I_{x0} = \Sigma \overline{I}_{ix} + \Sigma A_i d_{ix0}^2$ [cm^4]
1. Ala superiore	67,5	16,9	19.278,9	28,5	
2. Ala inferiore	67,5	16,9	19.278,8	28,5	
3. Anima	39,4	0	0	3.255,8	
SOMME			38.557,4	3.312,8	41.870,2

b) Si calcola il momento di inerzia della sezione composta rispetto a y_0. Si considerano sempre tre rettangoli (le due ali e l'anima) nei quali, a causa del nuovo asse di riferimento (y_0 e non più x_0), quella che prima era la base diviene adesso l'altezza, mentre l'altezza di prima è adesso la base. Inoltre il baricentro di tutti e tre i rettangoli cade sull'asse y_0 e quindi $d_{1y0} = d_{2y0} = d_3 = 0$.

$$A_1 = A_2 = eb = 2{,}25 \text{ cm} \times 30 \text{ cm} = 67{,}5 \text{ cm}^2$$

$$\overline{I}_{1y} = \overline{I}_{2y} = \frac{eb^3}{12} = \frac{\left(2{,}25 \text{ cm}\right) \times \left(30 \text{ cm}\right)^3}{12} = 5062{,}5 \text{ cm}^4$$

$$A_3 = la = 31{,}5 \text{ cm} \times 1{,}25 \text{ cm} = 39{,}4 \text{ cm}^2 \qquad \overline{I}_{3y} = \frac{la^3}{12} = \frac{\left(31{,}5 \text{ cm}\right) \times \left(1{,}25 \text{ cm}\right)^3}{12} = 5{,}1 \text{ cm}^4$$

Dalla tabella risulta $I_{y0} = 10.130 \text{ cm}^4$ ◀

Parte	A_i [cm^2]	d_{iy0} [cm]	$A_i d_{iy0}^2$ [cm^4]	$\bar{I}_{iy}$ [cm^4]	$I_{y0} = \Sigma\bar{I}_{iy} + \Sigma A_i d_{iy0}^2$ [cm^4]
1. Ala superiore	67,5	0	0	5.062,5	
2. Ala inferiore	67,5	0	0	5.062,5	
3. Anima	39,4	0	0	5,1	
SOMME			0	10.130,1	10.130,1

c) Noti i momenti di inerzia assiali baricentrici e l'area totale della sezione composta $A = 67{,}5 \text{ cm}^2 + 67{,}5 \text{ cm}^2 + 39{,}4 \text{ cm}^2 = 174{,}4 \text{ cm}^2$, si possono calcolare i raggi di inerzia baricentrici (**3-6**):

$$k_{x0} = \sqrt{\frac{I_{x0}}{A}} = \sqrt{\frac{41.870 \text{ cm}^4}{174{,}4 \text{ cm}^2}} = 15{,}5 \text{ cm} \qquad k_{y0} = \sqrt{\frac{I_{y0}}{A}} = \sqrt{\frac{10.130 \text{ cm}^4}{174{,}4 \text{ cm}^2}} = 7{,}6 \text{ cm}$$ ◀

d) Il momento di inerzia polare J_G rispetto al baricentro G della sezione a doppia T si calcola con la **3-5**:

$$J_G = I_{x0} + I_{y0} = 41.870 \text{ cm}^4 + 10.130 \text{ cm}^4 = 52.000 \text{ cm}^4$$ ◀

mentre il raggio di inerzia polare baricentrico vale (**3-6**):

$$k_G = \sqrt{\frac{J_G}{A}} = \sqrt{\frac{52.000 \text{ cm}^4}{174{,}4 \text{ cm}^2}} = 17{,}3 \text{ cm}$$ ◀

COMMENTI

1. Le ali contribuiscono per il 92% ($38.557 \text{ cm}^4/41.870 \text{ cm}^4 = 0{,}92$) al momento di inerzia della sezione composta rispetto a x_0 a causa del valore elevato del termine di trasporto $A_i d_i^2$.
2. Il contributo dell'anima al momento di inerzia della sezione composta rispetto a y_0 è insignificante ($5 \text{ cm}^4/10.130 \text{ cm}^4 = 0{,}0005 = 0{,}05\%$) in quanto l'area dell'anima è molto vicina a y_0.
3. Invece di considerare la sezione composta dalla somma di tre rettangoli (le due ali più l'anima), si poteva (*Figura 3.17-b*) considerare la sezione differenza tra un rettangolo pieno (area positiva) e due vuoti (aree negative): i momenti di inerzia delle due aree negative vanno sottratti al momento di inerzia dell'area positiva.