

4.7 Travature reticolari

4.7.1 Definizioni

Le **travature reticolari** (*trusses*) sono strutture i cui membri (*members*) sono aste rettilinee, mutuamente collegate a cerniera ai loro estremi in punti chiamati nodi (*joints*) secondo una disposizione geometrica ordinata in modo tale da formare un sistema indeformabile (*Figura 4.18*). Nella pratica costruttiva^{4.1} le aste sono solitamente collegate tra loro con incastrati ottenuti in genere per saldatura, chiodatura o bullonatura, ma considerarli delle cerniere semplifica il calcolo e va a vantaggio della sicurezza. I carichi esterni sono forze che, per semplicità, si intendono concentrate nei nodi, mentre le aste formano tra loro sul piano delle maglie triangolari (nello spazio sarebbero dei tetraedri). Nelle travature reticolari *piane* le aste sono situate sullo stesso piano contenente le forze.

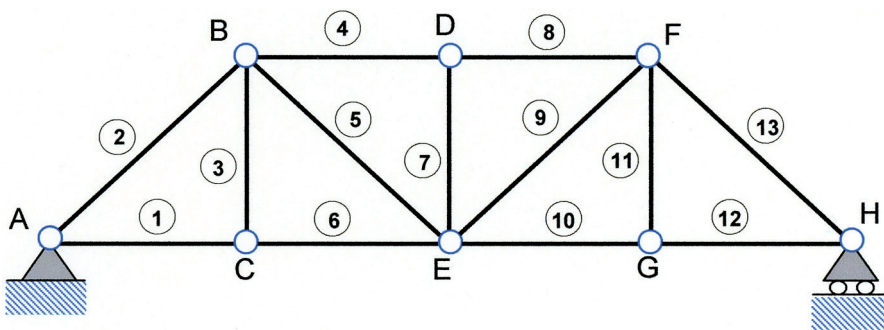


Fig. 4.18-a - Esempio di travatura reticolare con 13 aste ($a = 13$) e 8 nodi ($n = 8$). La travatura è isostatica perché i vincoli esterni (cerniera e carrello) saturano i 3 gradi di libertà della struttura piana e il numero delle aste corrisponde a quello dato dalla relazione 4-5: $a = 2n - 3 = 2 \times 8 - 3 = 13$.

Ogni struttura poligonale formata da quattro o più aste è un cinematismo; tipico è il quadrilatero articolato usato nelle macchine. Al contrario, tre aste che formano un triangolo costituiscono una struttura isostatica. Il triangolo è quindi la forma più semplice di struttura reticolare isostatica di cui costituisce pertanto anche la cellula base per formare la struttura (*Figura 4.18* e *4.19*). Condizione necessaria, ma non sufficiente (*Figura 4.18-b*), affinché una travatura reticolare piana sia isostatica è che lo sia rispetto ai vincoli esterni (3 gradi di libertà nel piano) e che il numero a delle sue aste necessarie per collegare n nodi soddisfi la relazione:

$$a = 2n - 3 \quad 4-5$$

4.1 - Le strutture reticolari offrono una delle più antiche soluzioni al problema delle coperture: le capriate in legno che coprivano le basiliche romane ne rappresentano un primo esempio. L'evoluzione di sistemi costruttivi basati su elementi reticolari ha portato al passaggio dalla trave ad anima piena alla trave reticolare. Il maggior sviluppo si ebbe nell'Ottocento quando si riuscì a produrre industrialmente laminati di ferro con caratteristiche meccaniche adeguate per poter essere utilizzati nella realizzazione delle strutture reticolari, tipicamente quelle dei ponti ferroviari.

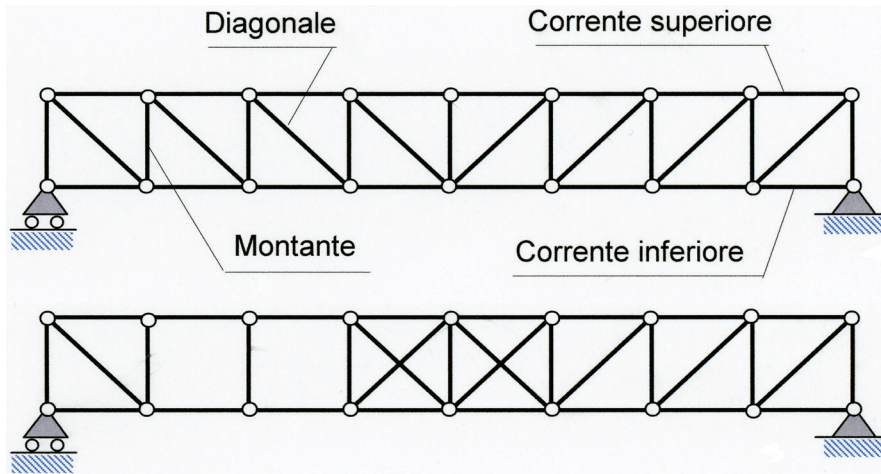


Fig. 4.18-b - Esempi di strutture reticolari: isostatica (sopra), e in parte iperstatica e in parte labile (sotto) a causa dello spostamento di un'asta. Anche la struttura di sotto verifica la relazione 4-5 ($a = 2n - 3$) perché il numero di aste e di nodi è rimasto invariato, ma non è più stabile.

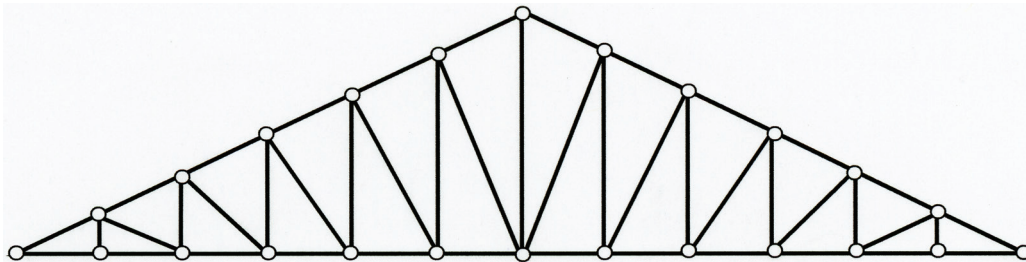
Una travatura reticolare ha, per definizione, il seguente schema statico:

- i nodi sono cerniere perfette;
- gli assi delle aste concorrono ai nodi senza eccentricità;
- i carichi agiscono solo sui nodi^{4,2} affinché le aste possano trasmettere forze solo alle loro estremità.

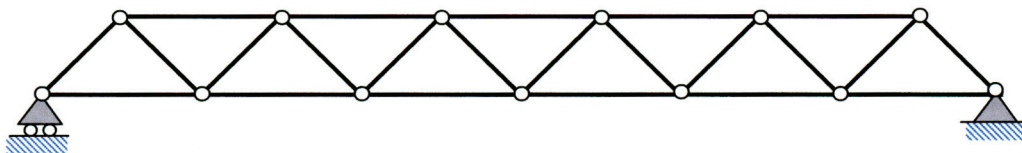
In virtù dell'ultima ipotesi, le aste sono soggette soltanto a forza normale di trazione o di compressione: la generica asta tesa è detta *tirante*, mentre quella compressa è un *puntone*.

Una volta verificato che la struttura sia isostatica (4-5), il primo passo nell'analisi di una travatura reticolare è impostare l'equilibrio delle forze esterne (carichi più reazioni vincolari) mediante le equazioni cardinali della statica in modo da determinare le reazioni. Isolata quindi una parte della struttura, si considera il sistema di forze agente su di essa; se alcune forze sono note, è possibile calcolare le altre mediante le equazioni della statica, dato che la porzione in esame dovrà risultare in equilibrio. Lo studio dell'equilibrio può essere limitato a un singolo nodo (*metodo dell'equilibrio ai nodi*) o ad un insieme composto da diversi elementi e nodi (*metodo delle sezioni o di Ritter*). Risolte le azioni interne presenti sulle singole aste della struttura, si conduce la verifica di resistenza confrontando il valore della tensione normale con la tensione ammissibile del materiale; nelle aste compresse va condotta anche la verifica per instabilità elastica che può risultare più severa della verifica di resistenza.

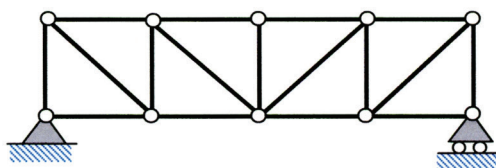
4.2 - È fondamentale che le travature reticolari siano caricate solamente da forze concentrate applicate nei nodi, affinché negli elementi si sviluppino solo forze normali di trazione o di compressione; se i carichi fossero applicati direttamente sugli elementi stessi si svilupperebbero anche delle azioni interne dovute a flessione e a taglio.



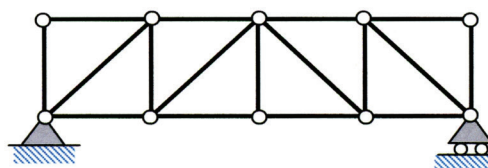
a) Travatura francese della capriata Polonceau. La necessità di coprire luci sempre più grandi ha condotto via via all'inserimento di ulteriori elementi strutturali al fine di parzializzare la luce libera della trave.



b) Travatura Warren, considerata come soluzione ottimale per opere da ponte. La struttura reticolare, realizzata mediante una successione di elementi triangolari accostati, presenta il vantaggio di concentrare il materiale secondo le linee di massima concentrazione degli sforzi.



Trave Pratt



Trave Howe

c) Quando l'altezza necessaria per raggiungere determinati livelli di rigidità è troppo estesa, nella trave Warren si raggiungono eccessive lunghezze degli elementi che possono generare nelle aste compresse instabilità per carico di punta; bisogna allora passare ad altri tipi di struttura come le travi Pratt e Howe. Essendo il pericolo di instabilità per carico di punta tanto maggiore quanto maggiore è la lunghezza dell'asta (formula 23-7 del carico critico di Eulero), la trave Pratt, in cui l'asta diagonale lavora da tirante (per carichi orientati verso il basso e simmetrici) è preferibile alla trave Howe in cui l'asta diagonale è un puntone.

Fig. 4.19 - Esempi diversi di travature. La travatura reticolare è una struttura cinematicamente determinata, piana oppure spaziale, costituita da un insieme di aste rettilinee, incernierate e collegate le une alle altre mediante nodi, che forma un'unica membratura, nella quale la lunghezza è largamente preponderante rispetto all'altra dimensione (o alle altre nel caso tridimensionale). Con la struttura reticolare si realizza un significativo risparmio di materiale rispetto a quello della trave piena di ugual luce e soggetta alla stessa condizione di carico.

4.7.2 Metodo dell'equilibrio ai nodi

Una struttura reticolare isostatica è in equilibrio se è in equilibrio ogni suo nodo. Il sistema di forze che agisce sul nodo è definito dalle aste collegate da questo e dalle forze esterne applicate al nodo. Poiché le forze sono convergenti al nodo, l'equazione di equilibrio dei

momenti rispetto al nodo stesso è identicamente soddisfatta ($\Sigma M_{\text{nodo}} = 0$); nel caso piano si hanno pertanto a disposizione per ogni nodo solo le rimanenti due equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale: $\Sigma F_{x,\text{nodo}} = 0$ e $\Sigma F_{y,\text{nodo}} = 0$; le azioni incognite da valutare non possono quindi essere più di due per nodo. La *condizione di equilibrio* del sistema di forze agente sul nodo può essere impostata sia *graficamente*, chiusura del poligono delle forze con i vettori forza tracciati in ordine ciclico (di solito percorrendo il contorno del nodo in senso orario)^{4,3}, sia *analiticamente*, attraverso la scrittura delle due equazioni di equilibrio alla traslazione. Note le forze esterne e calcolate le reazioni vincolari, per poter utilizzare il metodo dell'equilibrio ai nodi ci deve essere nella travatura almeno un nodo in cui convergono due aste (detto *nodo canonico*) e risolverlo mediante le due equazioni di equilibrio del nodo stesso. Si procede in sequenza, scrivendo l'equilibrio di un primo nodo e poi, servendosi dei risultati ottenuti, di un secondo per cui si abbiano due sole incognite e così di seguito. Una volta individuata la forza normale N esercitata dal nodo sull'asta, resta definita anche l'azione trasmessa dall'asta al nodo, azione che deve essere uguale in intensità e direzione ma di verso opposto (*Figura 4.20*).

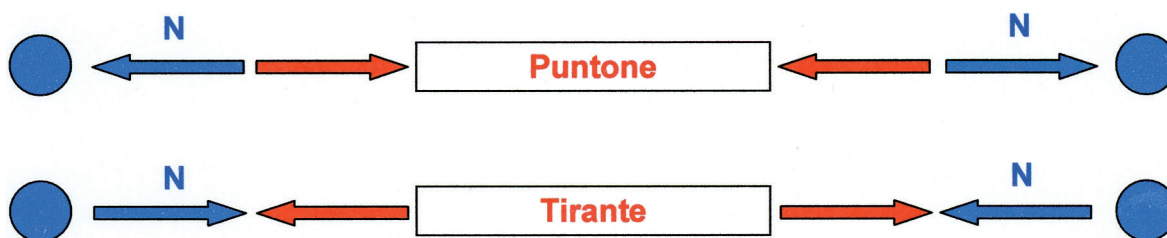


Fig. 4.20 - Forza normale N esercitata *dal nodo sull'asta* di una travatura reticolare piana. Per il principio di azione e reazione, l'azione trasmessa *dall'asta al nodo* ha uguale intensità e direzione di N ma *verso opposto*.

4.7.3 Metodo delle sezioni o di Ritter

Si usa il metodo delle sezioni quando per qualche motivo non è necessario determinare la forza normale in tutte le aste, ma solo in alcune (ad esempio, quelle ritenute più sollecitate). Si suddivide la travatura reticolare piana in *due parti distinte* mediante un'opportuna sezione, detta *sezione di Ritter*. Questa sezione dovrà interessare *l'asta di cui si vuole determinare la forza normale e, al più, altre due aste*. Le tre aste sezionate dovranno inoltre essere *a due a due concorrenti* nello stesso punto: un nodo se le rette d'azione si incontrano al finito, un punto all'infinito nella direzione degli assi delle aste per coppie di aste parallele tra loro.

Operata la sezione di Ritter, sui monconi delle tre aste tagliate si introducono le forze normali incognite, convenzionalmente di verso uscente dalle sezioni di Ritter come se le aste fossero dei tiranti. Imponendo la condizione di equilibrio alla rotazione di una delle due parti in cui è stata divisa la travatura rispetto al punto d'intersezione (*polo di Ritter*) degli assi di due delle tre aste interessate dalla sezione di Ritter in modo che solo una forza

4.3 - Al metodo dell'equilibrio ai nodi è associato il *poligono di Cremona* o *cremoniano* che è formato dalla combinazione dei poligoni di equilibrio delle forze di tutti i nodi di una travatura reticolare. Si fa notare che nel tracciare i poligoni delle forze separati, è necessario percorrere il contorno di ciascun nodo nello stesso ordine di quello di ogni altro nodo; una volta iniziato, l'ordine non può più essere cambiato.

incognita abbia braccio diverso da zero rispetto al polo, si ottiene la forza normale nella terza asta. Tenendo poi presente che le forze normali, che agiscono sulle sezioni delle aste sezionate, sono le stesse per le due parti, si può scrivere l'equilibrio per una sola parte, quella che porta a calcoli più semplici. Si noti che, se il punto di intersezione si trova all'infinito in una data direzione, l'equazione di equilibrio alla rotazione diviene un'equazione di equilibrio alla traslazione nella direzione ortogonale.

Esempio 4.10 Azioni interne nelle aste di una travatura reticolare

Determinare le azioni interne nelle aste della travatura reticolare della *Figura 4.21* con $a = 7$ aste ed $n = 5$ nodi e soggetta a carichi di modulo F .

Verifica dell'isostaticità (4-5): $a = 2n - 3 = 2 \times 5 - 3 = 7$ aste

Calcolo delle reazioni vincolari con le equazioni cardinali della statica 4-1 (*Figura 4.21*):

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow +F + R_{Ax} = 0 \Rightarrow R_{Ax} = -F \Rightarrow \mathbf{R}_{Ax} = F \leftarrow$$

$$\curvearrowright \Sigma M_A = 0 \Rightarrow -F \frac{l}{2} - F \frac{l}{2} - Fl + R_{Ey} 2l = 0 \Rightarrow R_{Ey} = +F \Rightarrow \mathbf{R}_{Ey} = F \uparrow$$

$$\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow -2F + R_{Ay} + R_{Ey} = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 2F - F = +F \Rightarrow \mathbf{R}_{Ay} = F \uparrow$$

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{(-F)^2 + (+F)^2} = \sqrt{2F^2} = \sqrt{2} \cdot F \Rightarrow \mathbf{R}_A = \sqrt{2} \cdot F \ 45^\circ \ \Delta$$

Si scrivono le equazioni di equilibrio ai nodi e si traccia il poligono delle forze (*Figura 4.22*), ottenendo il valore delle forze normali sulle aste (*Tabella 4.3*). Iniziando con il nodo A (non canonico), si assumono le forze normali \mathbf{N}_1 ed \mathbf{N}_2 che il nodo esercita sulle aste con verso uscente dal nodo A: ciò corrisponde (*Figura 4.20*) a una forza di trazione nelle aste; nel

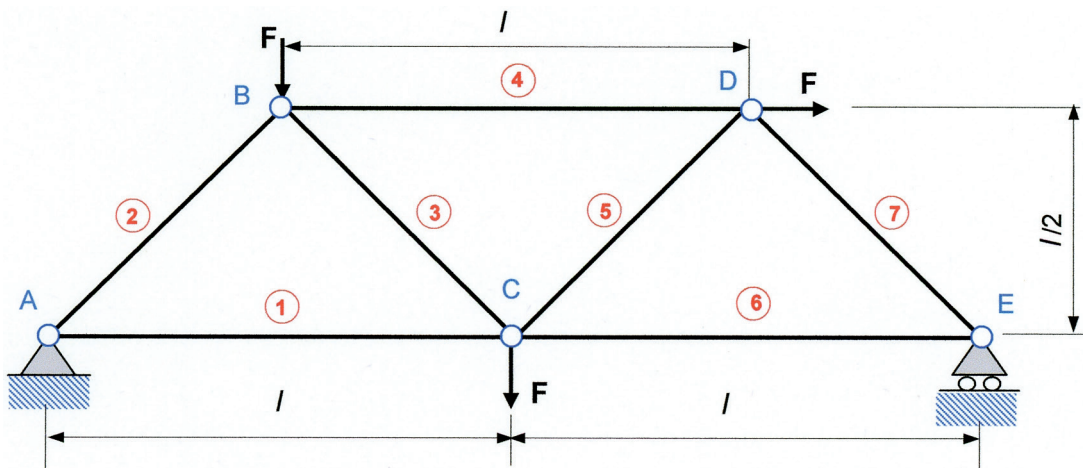


Fig. 4.21-a - Schema della travatura reticolare trattata nell'Esempio 4.10.

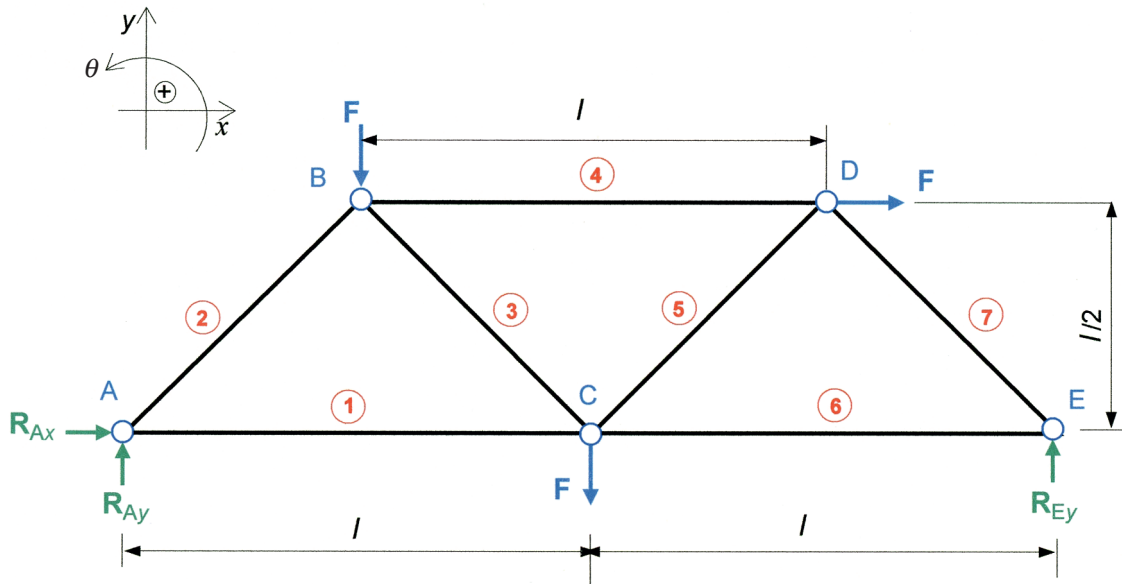


Fig. 4.21-b - Schema di corpo libero per la determinazione delle reazioni vincolari.

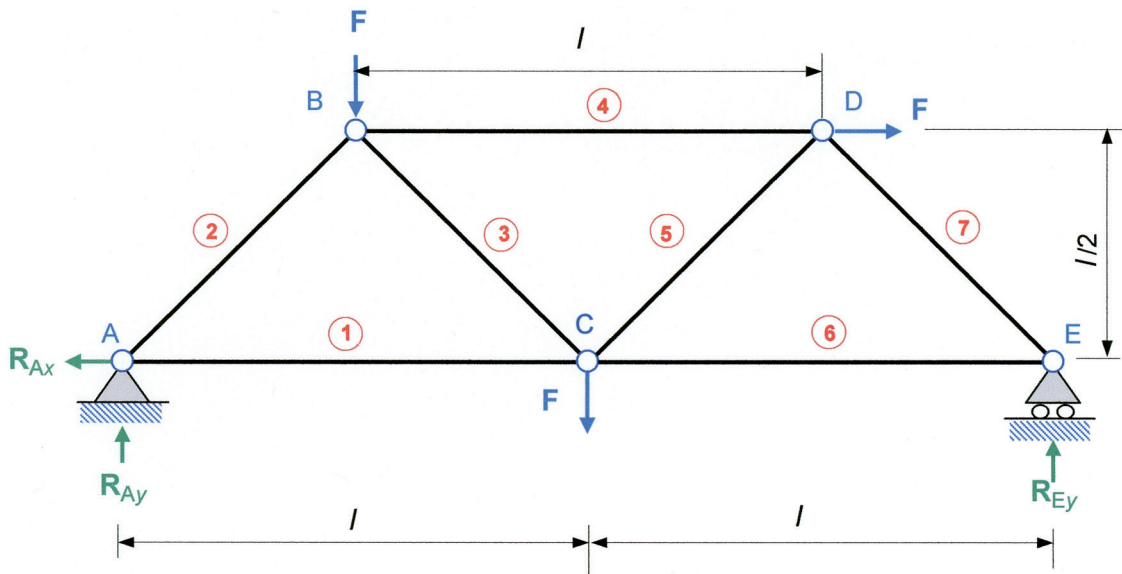


Fig. 4.21-c - Verso finale delle reazioni vincolari: $R_{Ax} = F$, $R_{Ay} = F$ ed $R_{Ey} = F$.

calcolo dell'equilibrio agli altri nodi verrà assunta la stessa convenzione. In particolare si possono fare le seguenti osservazioni sul singolo nodo:

- A) il verso ipotizzato dell'asta 1 è corretto poiché il valore di N_1 è positivo: l'asta 1 è quindi un tirante; l'asta 2 è invece in compressione (puntone) dal momento che il valore di N_2 è negativo e quindi il verso corretto (poligono delle forze di *Figura 4.22-a*) è opposto a quello stabilito all'inizio;

- B) l'azione N_2 che il nodo esercita sull'asta 2 è diretta verso il nodo; il valore dell'azione N_3 è uguale a zero, l'asta 3 è quindi scarica;
- C) in questo nodo convergono 4 aste, ma essendo note le azioni nelle aste 1 e 3 il nodo è diventato canonico poiché occorre determinare le azioni nelle due aste 5 e 6;
- D) l'incognita è una sola e quindi è sufficiente una sola equazione di equilibrio;
- E) in questo nodo tutte le azioni sono note: la condizione di equilibrio è identicamente soddisfatta; a conferma del risultato si trova che il poligono delle forze è chiuso.

$$A \begin{cases} \uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F + N_2 \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow F + N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow N_2 = -\frac{2F}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}F}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}F \\ \rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow -F + N_1 + N_2 \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow N_1 = F - \left(-\sqrt{2} \cdot F \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2F \end{cases}$$

$$B \begin{cases} \uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 \sin 45^\circ - F - N_3 \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow \sqrt{2} \cdot F \frac{\sqrt{2}}{2} - F - N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow N_3 = 0 \\ \rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_2 \cos 45^\circ + N_3 \cos 45^\circ + N_4 = 0 \Rightarrow N_4 = -\sqrt{2} \cdot F \frac{\sqrt{2}}{2} = -F \end{cases}$$

$$C \begin{cases} \uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_5 \sin 45^\circ - F = 0 \Rightarrow N_5 = \frac{F}{\sin 45^\circ} = \frac{2}{\sqrt{2}} F = \sqrt{2}F \\ \rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_6 + N_5 \cos 45^\circ - N_1 = 0 \Rightarrow N_6 + \sqrt{2}F \frac{\sqrt{2}}{2} - 2F = 0 \Rightarrow N_6 = F \end{cases}$$

$$D \uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow -N_5 \sin 45^\circ - N_7 \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow N_7 = -N_5 = -\sqrt{2}F$$

$$E \begin{cases} \uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow -N_7 \sin 45^\circ + F = 0 \Rightarrow -(\sqrt{2}F) \frac{\sqrt{2}}{2} + F = 0 \\ \rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow +N_7 \cos 45^\circ - N_6 = 0 \Rightarrow +\sqrt{2}F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F = 0 \end{cases}$$

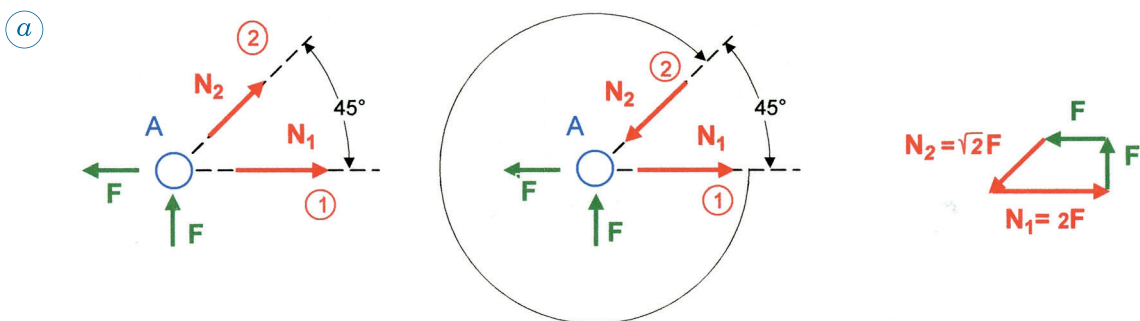


Fig. 4.22 - segue

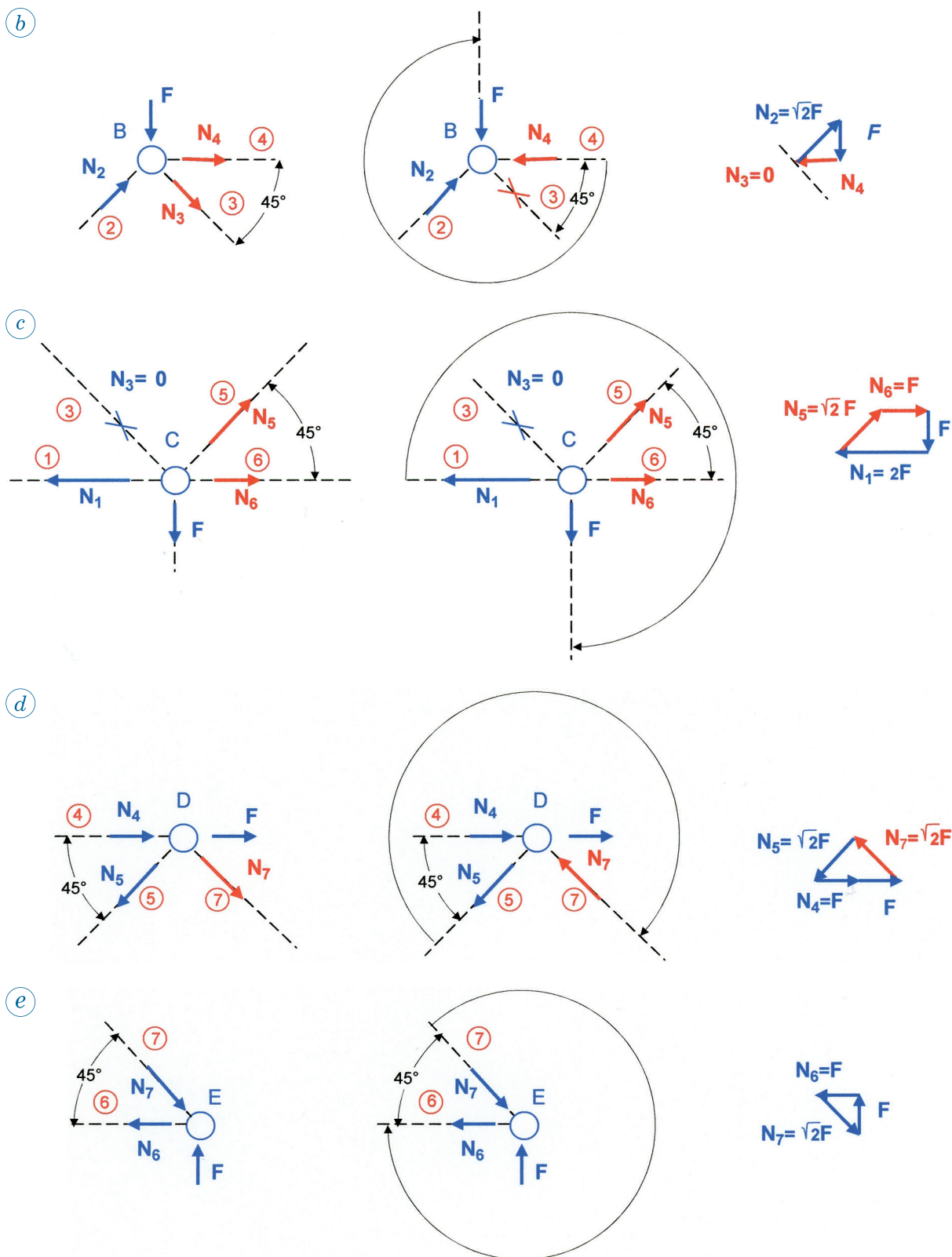


Fig. 4.22 - Equilibrio ai nodi per via analitica e per via grafica (poligono delle forze).

Tabella 4.3

Forze normali N sulle aste della struttura

Asta	1	2	3	4	5	6	7
N	$2F$	$-\sqrt{2}F$	0	$-F$	$\sqrt{2}F$	F	$-\sqrt{2}F$
Tipo	tirante	puntone	scarica	puntone	tirante	tirante	puntone

Indicata con $s-s$ la sezione di Ritter della travatura (*Figura 4.23*), si vogliono determinare le forze normali nelle aste 1, 3 e 4:

1. si impone l'equilibrio alla rotazione di una delle due parti di travatura attorno al nodo B, che è il polo di Ritter dell'asta 1; essendo il valore risultante positivo, il verso ipotizzato è quello effettivo e l'asta risulta sottoposta a trazione (tirante);
2. la condizione di equilibrio alla rotazione attorno al polo di Ritter dell'asta 3 che si trova all'infinito dell'asse orizzontale x si traduce in una condizione di equilibrio alla traslazione in direzione verticale y consentendo di ottenere $N_3 = 0$, per cui l'asta 3 risulta scarica;
3. l'equilibrio alla rotazione attorno al polo C, permette di ottenere N_4 ; il valore è negativo e quindi il verso ipotizzato è opposto a quello effettivo e l'asta 4 risulta compressa (puntone).

Procedendo in modo analogo a quanto fatto sopra, si possono determinare le forze normali nelle aste 5 e 6 (ambidue risultano dei tiranti) tracciando la sezione $t-t$ (*Figura 4.24*) nella parte di destra della struttura reticolare; non si riporta il calcolo per l'asta 4 poiché era già stato fatto sopra.

$$\text{Asta 1: } \curvearrowright \Sigma M_B = 0 \Rightarrow -R_{Ax} \frac{l}{2} - R_{Ay} \frac{l}{2} + N_1 \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow -F \frac{l}{2} - F \frac{l}{2} + N_1 \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow N_1 = 2F$$

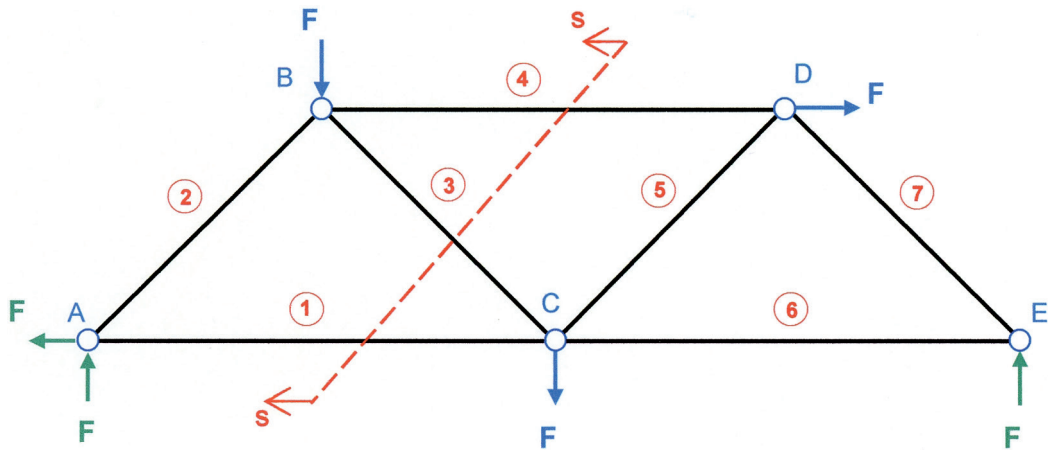
$$\text{Asta 3: } \uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} - F - N_3 \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow F - F - N_3 \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow N_3 = 0$$

$$\text{Asta 4: } \curvearrowright \Sigma M_C = 0 \Rightarrow -R_{Ay} l + F \frac{l}{2} - N_4 \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow -Fl + F \frac{l}{2} - N_4 \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow N_4 = -F$$

$$\text{Asta 5: } \uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{Ey} - N_5 \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow F - N_5 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow N_5 = \sqrt{2}F$$

$$\text{Asta 6: } \curvearrowright \Sigma M_D = 0 \Rightarrow R_{Ey} \frac{l}{2} - N_6 \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow F \frac{l}{2} - N_6 \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow N_6 = F$$

a)



b)

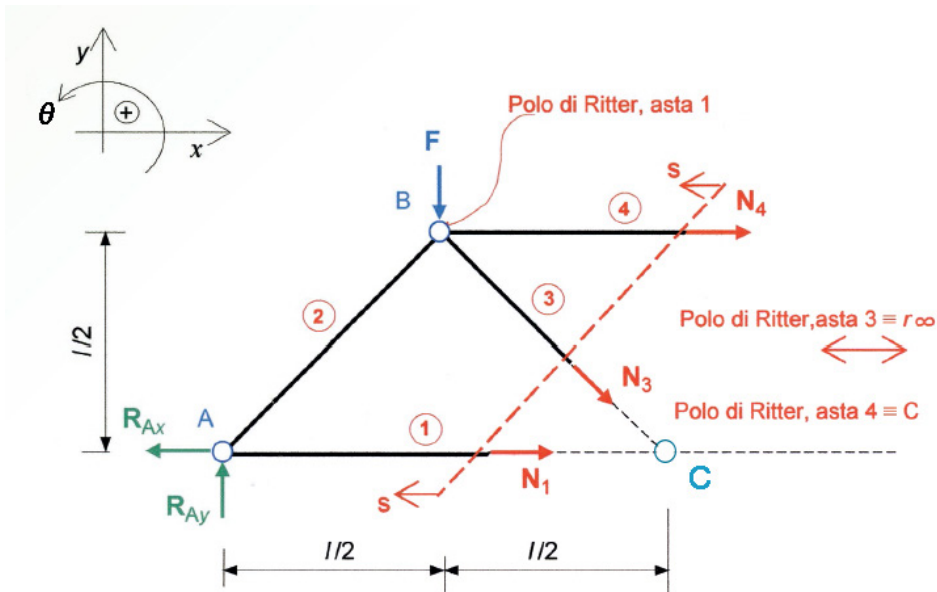
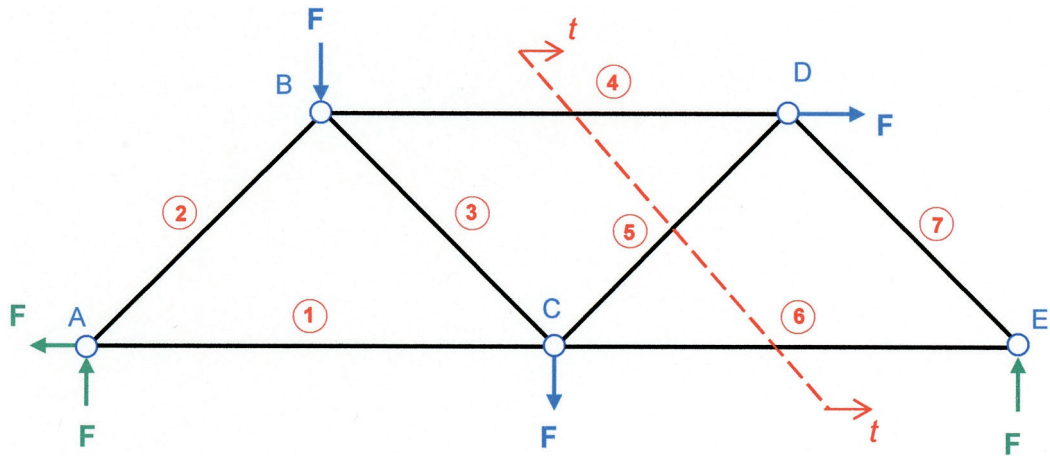


Fig. 4.23 - a) Sezione di Ritter $s-s$ utilizzata per determinare le forze normali nelle aste 1, 3 e 4.

b) L'asta 1 ha come polo di Ritter il nodo B in cui si incontrano le linee d'asse delle aste 3 e 4; l'asta 4 avrà come polo di Ritter il nodo C intersezione degli assi delle aste 1 e 3; l'asta 3, infine, avrà come polo di Ritter il punto all'infinito della direzione orizzontale, intersezione delle rette d'asse delle aste 1 e 4.

a)



b)

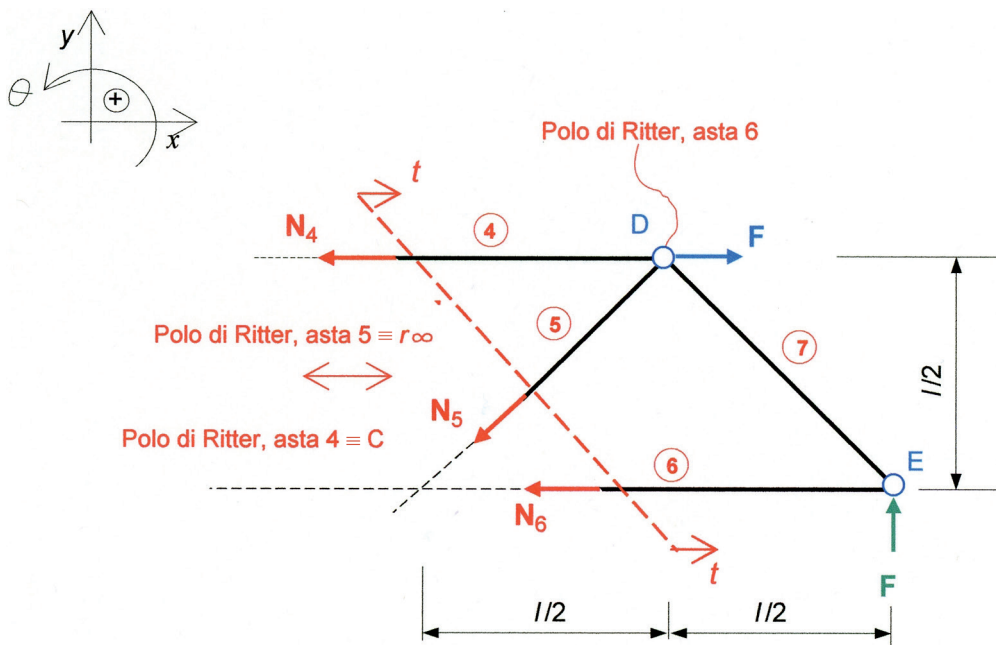


Fig. 4.24 - a) Sezione di Ritter $t-t$ utilizzata per determinare le forze normali nelle aste 4, 5 e 6.

b) Sezione $t-t$ utilizzata per la determinazione degli sforzi nelle aste 4, 5 e 6 della parte di struttura di destra della travatura reticolare. L'asta 6 ha come polo di Ritter il nodo D, punto di intersezione delle linee d'asse delle aste 4 e 5; l'asta 4 avrà come polo di Ritter il nodo C, intersezione degli assi delle aste 5 e 6; l'asta 5, infine, avrà come polo di Ritter il punto all'infinito della direzione orizzontale, intersezione delle rette d'asse delle aste 4 e 6.