5 Macchine semplici

Prerequisiti

- Nozioni di proporzionalità diretta e inversa.
- Risoluzione di un'equazione di primo grado.
- Nozioni di trigonometria.
- Nozioni di equilibrio statico.

5.1 Equilibrio delle macchine semplici ideali e vantaggio

Le **macchine** sono strutture utilizzate per trasmettere e modificare le forze; sia che le macchine siano **semplici** oppure **composte** da più macchine semplici (*simple machines*), il loro scopo principale è quello di trasformare le *forze entranti*, la cui risultante viene chiamata *forza motrice* o *potenza*[5.1], nelle *forze uscenti* dalla macchina, la cui risultante viene chiamata *forza resistente* o *resistenza*. Così la forza motrice o potenza **P**, esercitata sui manici di una pinza, viene amplificata fino a vincere la resistenza **Q** che il filo, posto tra le ganasce della pinza, oppone al tentativo di tagliarlo (*Figura 5.1*).

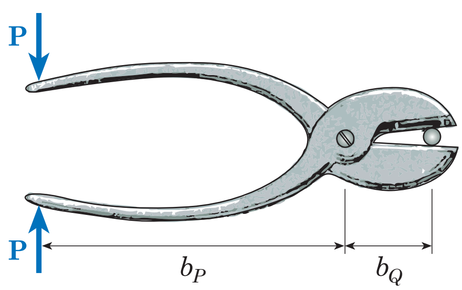


Fig. 5.1-a - La pinza è un esempio di macchina semplice: qui viene utilizzata per tagliare un filo.

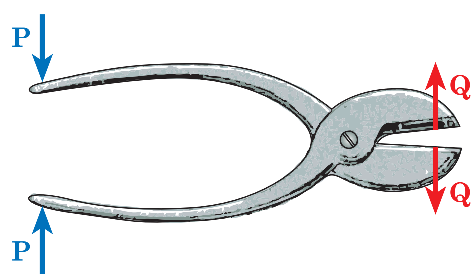


Fig. 5.1-b - Reazioni **Q** che il filo esercita sulle ganasce della pinza.

5.1 - Fare attenzione che nel caso delle macchine semplici è abituale indicare con il termine di potenza una forza, la forza motrice per l'appunto. Ma questo termine non va confuso con la potenza, quantità fisica che esprime il lavoro compiuto nell'unità di tempo.

Una macchina viene solitamente progettata in modo che, *in condizioni di equilibrio*, l'intensità della resistenza sia maggiore di quella della potenza. Il **vantaggio meccanico** K della macchina è il rapporto tra resistenza Q e potenza P:

$$K = \frac{\text{Forza resistente (resistenza)}}{\text{Forza motrice (potenza)}} = \frac{Q}{P} \qquad \textbf{5-1}$$

Il vantaggio di una macchina semplice è un numero puro, cioè senza dimensioni, in quanto è il rapporto tra due forze, che si misurano in newton [N]. Queste forze vengono determinate in condizioni **ideali** e cioè in *assenza* di tutte quelle limitazioni, e in particolare dell'*attrito*, che condizionano sensibilmente il funzionamento della macchina nella realtà.

La macchina risulta tanto più *vantaggiosa* ($K > 1$) quanto maggiore è la resistenza per una determinata intensità della potenza. Nel caso invece in cui sia $K < 1$, la macchina è *svantaggiosa*, mentre per $K = 1$ la resistenza risulta uguale alla potenza e la macchina è *indifferente*. Il vantaggio di una macchina composta è dato dal *prodotto* dei vantaggi delle singole macchine semplici.

5.2 Leva

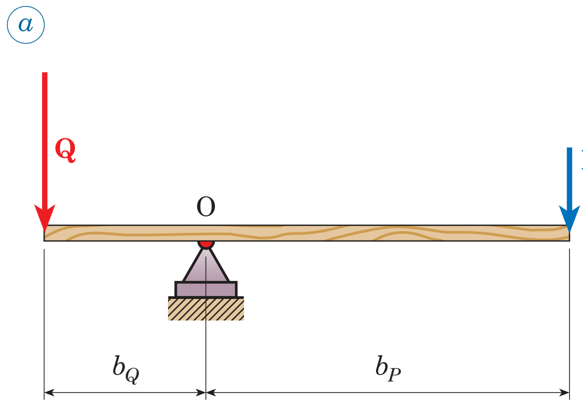
La **leva** è essenzialmente costituita da un'asta rigida libera di ruotare attorno a un punto fisso O detto *fulcro* e caricata con due forze: la potenza **P** e la resistenza **Q** distanti rispettivamente del *braccio* b_P e del *braccio* b_Q dal fulcro O (*Figura 5.2*). Si distinguono tre diversi tipi di leve:

– di *primo genere* (*Figura 5.2-a*), quando il fulcro O è interno ai due punti in cui sono applicate le due forze **P** e **Q** mentre ciascuno dei due bracci b_P e b_Q può essere uguale o maggiore oppure infine minore dell'altro braccio;
– di *secondo genere* (*Figura 5.2-b*), quando il fulcro O si trova a un'estremità e la resistenza **Q** è applicata tra il fulcro e la potenza **P**, con il braccio b_Q che risulta sempre inferiore al braccio b_P;
– di *terzo genere* (*Figura 5.2-c*), quando il fulcro O si trova a un'estremità e la potenza **P** è applicata tra il fulcro e la resistenza **Q**, con il braccio b_Q che risulta sempre maggiore del braccio b_P.

La pinza (*Figura 5.3*) può venire schematizzata come una leva di primo genere, lo schiaccianoci (*Figura 5.4*) può essere ricondotto a una leva di secondo genere, mentre il braccio della gru della *Figura 5.5* è una leva di terzo genere.

Si consideri la leva di primo genere della *Figura 5.2-a* come una trave incernierata nel fulcro. In condizioni di equilibrio, la somma dei momenti (**4-1**) della potenza **P** e della resistenza **Q** rispetto a un generico punto, sia questo il fulcro O, deve risultare uguale a zero. Risolvendo rispetto al rapporto Q/P, si ricava per la **5-1** il vantaggio $K = Q/P$:

$$\circlearrowleft\!+\ \Sigma M_O = 0 \quad \Rightarrow \quad -P \cdot b_P + Q \cdot b_Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{P} = \frac{b_P}{b_Q} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{Q}{P} = \frac{b_P}{b_Q} \qquad \textbf{5-2}$$



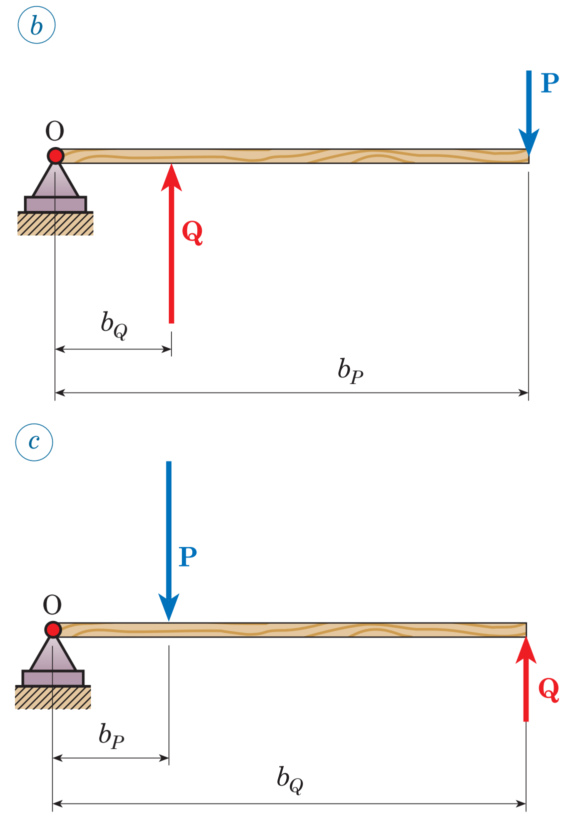


Fig. 5.2 - I tre diversi tipi di leva.
a) Leva di primo genere.
b) Leva di secondo genere.
c) Leva di terzo genere.

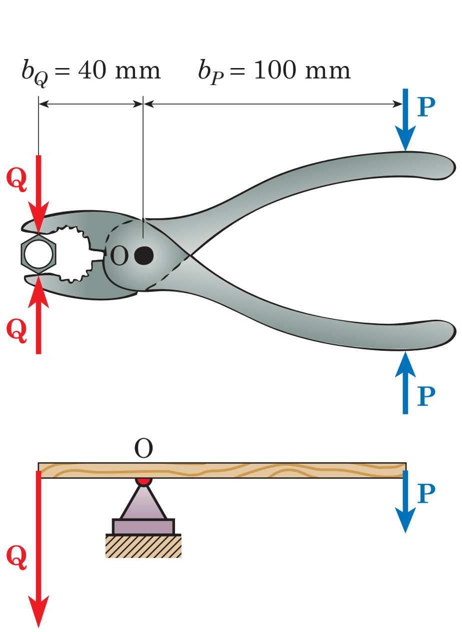


Fig. 5.3 - La pinza, che verrà trattata nell'*Esempio 5.1*, è una leva di primo genere.

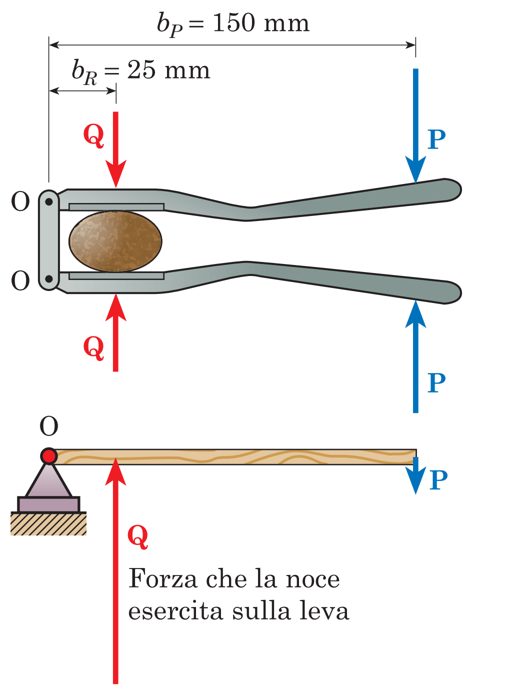


Fig. 5.4 - Esempio di leva di secondo genere: lo schiaccianoci, che verrà trattata nell'*Esercizio 5.1*.

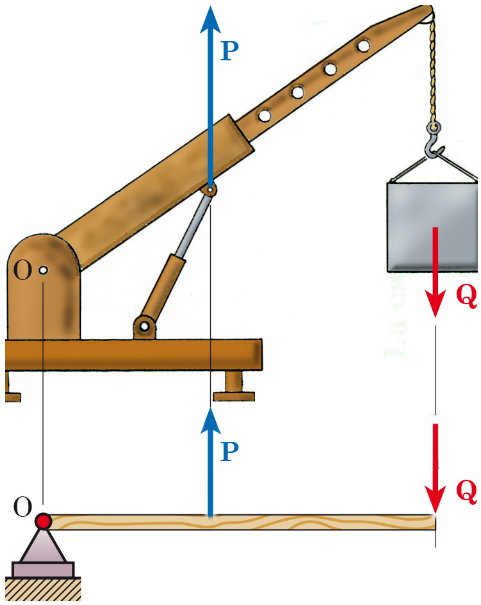


Fig. 5.5 - Esempio di leva di terzo genere: braccio della gru.

Il vantaggio della leva è tanto più grande quanto più il braccio b_P della potenza **P** aumenta rispetto al braccio b_Q della resistenza **Q**: se, ad esempio, i bracci fossero $b_P = 4$ m e $b_Q = 1$ m, il vantaggio risulterebbe pari a 4 corrispondente alla possibilità di spostare, ad esempio, un carico $Q = 4$ kN con una forza $P = 1$ kN. Quando invece i due bracci b_P e b_Q sono uguali, la leva diviene *indifferente* in quanto il vantaggio si riduce a 1: spostare un carico Q di 1 kN richiede una forza P ancora di 1 kN. Se infine il braccio b_P diviene inferiore al braccio b_Q, il vantaggio diviene inferiore a 1 e la leva di primo genere risulta svantaggiosa: un vantaggio di 0,5, dato da $b_P = 1$ m e $b_Q = 2$ m, richiederebbe, ad esempio, una forza $P = 2$ kN per spostare un carico $Q = 1$ kN.

L'equazione **5-2** si applica anche alle leve di secondo (*Figura 5.2-b*) e di terzo genere (*Figura 5.2-c*); scrivendo l'equilibrio dei momenti, si ottiene infatti:

$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_O = 0 \quad \Rightarrow \quad -P \cdot b_P + Q \cdot b_Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{P} = \frac{b_P}{b_Q} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{b_P}{b_Q} \qquad \text{[II genere]}$$

$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_O = 0 \quad \Rightarrow \quad +Q \cdot b_Q - P \cdot b_P = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{P} = \frac{b_P}{b_Q} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{b_P}{b_Q} \qquad \text{[III genere]}$$

Essendo $K = b_P/b_Q$, la leva di secondo genere (*Figura 5.2-b*) è vantaggiosa ($K > 1$) in quanto risulta sempre b_P maggiore di b_Q, mentre la leva di terzo genere (*Figura 5.2-c*) è svantaggiosa ($K < 1$) in quanto risulta sempre b_P inferiore a b_Q.

Esempio 5.1 Vantaggio e resistenza di una pinza

Sul manico della pinza della *Figura 5.3* viene esercitata la forza motrice (potenza) $P = 50$ N. Determinare:

a) il vantaggio K della pinza;

b) la resistenza Q.

SOLUZIONE

a) Il vantaggio si calcola con la relazione **5-2**:

$$K = \frac{b_P}{b_Q} = \frac{100\ \text{mm}}{40\ \text{mm}} = 2{,}5 \quad ◀$$

b) Ricavato il valore del vantaggio, la **5-1** consente di determinare la resistenza Q utilizzata per stringere il dado:

$$K = \frac{Q}{P} \quad \Rightarrow \quad Q = KP = 2{,}5 \times 50\ \text{N} = 125\ \text{N} \quad ◀$$

5.3 Carrucola e paranco

La **carrucola fissa** (*Figura 5.6*) è costituita da un disco che gira intorno a un perno sorretto da una staffa ancorata alla parete; sulla gola, situata alla periferia del disco, scorre una fune che porta alle due estremità la forza motrice **P** e la forza resistente **Q**. Il vantaggio meccanico della carrucola fissa è uguale a 1, come risulta scrivendo l'equilibrio dei momenti delle due forze rispetto al perno O:

$$\circlearrowleft^{+}\ \Sigma M_O = 0 \quad \Rightarrow \quad +P \cdot r - Q \cdot r = 0 \quad \Rightarrow \quad P = Q \quad \Rightarrow \quad K = \frac{Q}{P} = 1 \quad \text{[Carrucola fissa]} \qquad \textbf{5-3}$$

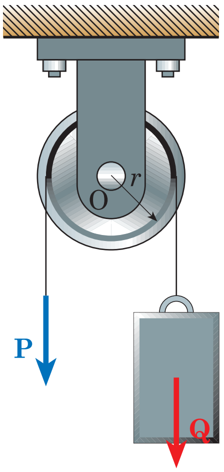
La carrucola fissa è quindi una macchina indifferente, in quanto il carico Q risulta uguale alla forza motrice P; questa macchina viene tuttavia impiegata per modificare la retta d'azione e il verso della forza **P**: in particolare il carico e la forza motrice risultano orientate secondo lo stesso verso.

La **carrucola mobile** (*Figura 5.7*), che sale verso l'alto lungo la fune ruotando intorno al punto O, è invece vantaggiosa perché il suo vantaggio K risulta uguale a 2, come si deduce scrivendo l'equilibrio dei momenti (**4-1**):

$$\circlearrowleft^{+}\ \Sigma M_O = 0 \quad \Rightarrow \quad +P \cdot 2r - Q \cdot r = 0 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{Q}{2} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{Q}{P} = 2 \quad \text{[Carrucola mobile]} \qquad \textbf{5-4}$$

Accoppiando (*Figura 5.8-a*) una carrucola mobile a una carrucola fissa si ha la possibilità di eliminare il principale difetto della carrucola mobile (*Figura 5.7*) e cioè quello di avere la forza motrice **P** diretta nel verso opposto alla forza resistente **Q**. Il **paranco semplice** (*Figura 5.8-b*), che rappresenta la realizzazione pratica di questo concetto, unisce così il vantaggio $K_{carrmob} = 2$ della carrucola mobile alla capacità di dar luogo a forze **P** e **Q** aventi lo stesso verso della carrucola fissa avente come vantaggio $K_{carrfissa} = 1$; il vantaggio $K_{parsempl}$ della macchina composta, il paranco, è il prodotto di quello delle due macchine $K_{parsempl} = K_{carrmob} \cdot K_{carrfissa} = 2$. Essendo $K = Q/P = 2$, la forza motrice del paranco semplice risulta pari alla metà della resistenza $P = Q/2$.

Con i **paranchi multipli** o **taglie** (*Figura 5.9*), macchine costituite dall'insieme di più paranchi semplici, si ottengono vantaggi considerevoli; un paranco multiplo avente n pulegge mobili ha un vantaggio pari a n volte il paranco semplice in quanto appunto va considerato come composto da n paranchi semplici.



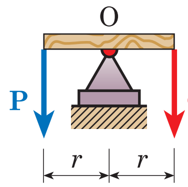
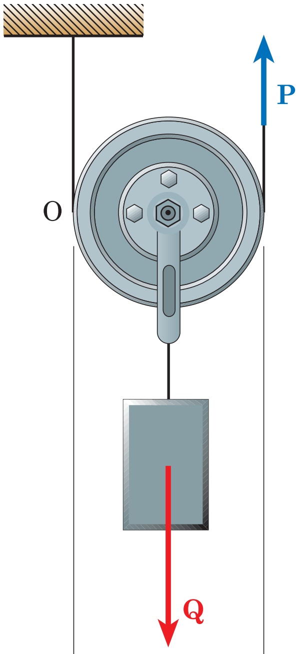


Fig. 5.6 - La carrucola fissa, vincolata a un sostegno mediante una staffa, è costituita da un disco che ruota attorno al fulcro O. Forza motrice **P** e forza resistente **Q** sono applicate alle due estremità della fune che scorre nella gola del disco. Potendosi schematizzare come una leva di primo genere avente i due bracci b_P e b_Q ambedue uguali al raggio r della ruota, il vantaggio della carrucola fissa poteva anche essere ottenuto ponendo $b_P = b_Q = r$ nell'equazione **5-2** che dà il vantaggio della leva.



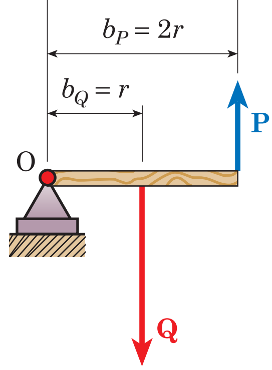


Fig. 5.7 - La carrucola mobile ha un estremo della fune fissato a un sostegno, mentre all'altro estremo è applicata la forza motrice **P**. Il carico o resistenza **Q** è applicato nel centro della carrucola mobile. Il fulcro O è costituito dal punto di contatto tra il tratto di fune fissata al sostegno e la carrucola. Potendosi schematizzare come una leva di secondo genere avente il braccio b_P della forza motrice **P** uguale a $2r$ e il braccio b_Q della forza resistente Q pari a r, il vantaggio della carrucola mobile può anche essere ottenuto ponendo $b_P = 2r$ e $b_Q = r$ nell'equazione **5-2** che dà il vantaggio della leva.

Si è visto sopra che per il paranco semplice è $P = Q/2$ e $K = 2$; l'intensità P della forza motrice e il vantaggio K del paranco multiplo risulteranno allora:

$$P = \frac{Q}{2n} \qquad K = \frac{Q}{P} = 2n \qquad \text{[Paranco multiplo con } n \text{ pulegge mobili]} \tag{5-5}$$

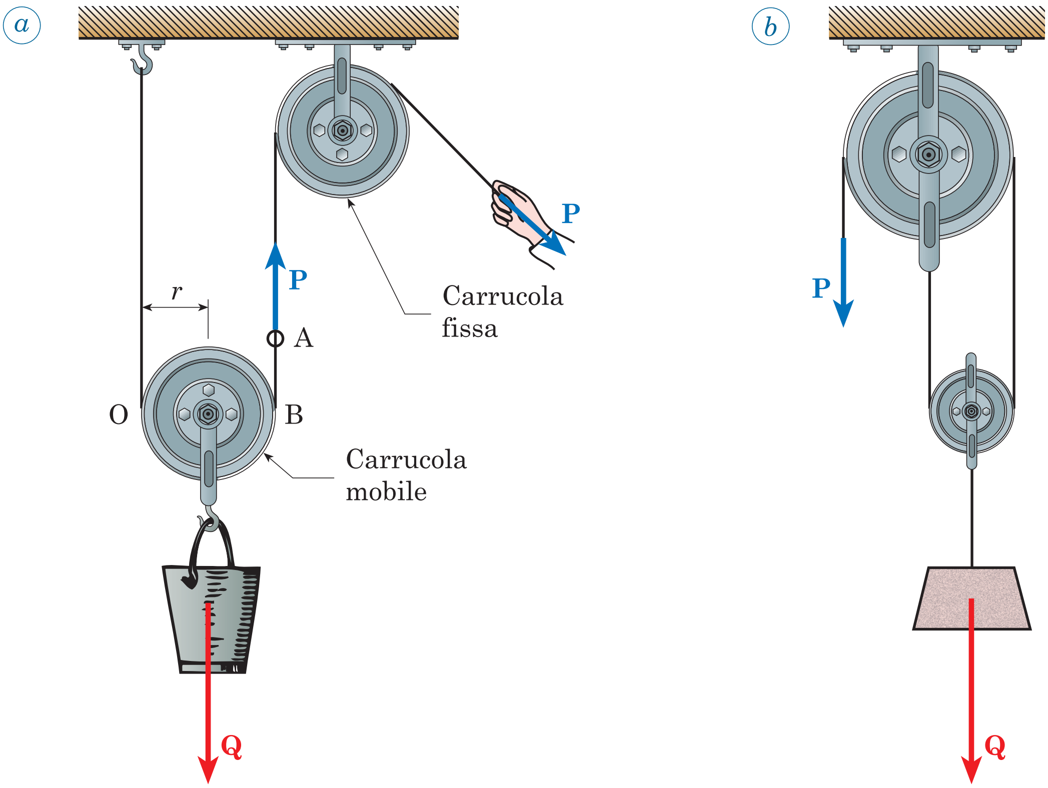


Fig. 5.8 - a) Carrucola mobile accoppiata a una carrucola fissa.
b) Il paranco semplice consiste nell'accoppiamento di una carrucola fissa con una carrucola mobile.

Esempio 5.2 Paranco multiplo

Si deve sollevare il basamento di un motore di massa $m = 204$ kg. Dopo aver calcolato l'intensità Q della forza resistente, determinare il vantaggio e l'intensità P della forza motrice richiesta nel caso in cui venga utilizzato il paranco a due pulegge mobili della *Figura 5.9-b*.

SOLUZIONE

La forza resistente Q relativa al basamento del motore è data (**1-10′**) dal prodotto della massa $m = 204$ kg del basamento per l'accelerazione di gravità $g = 9{,}81$ m/s^2:

$$Q = mg = 204 \text{ kg} \times 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 2001{,}24 \text{ N} \approx 2 \text{ kN} \quad ◀$$

Nel caso del paranco multiplo il vantaggio K e la forza motrice P si ottengono con la **5-5** dove si pone $n = 2$ in quanto due sono le pulegge mobili:

$$K = \frac{Q}{P} = 2n = 2 \times 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{Q}{4} = \frac{2000 \text{ N}}{4} = 500 \text{ N} \quad ◀$$

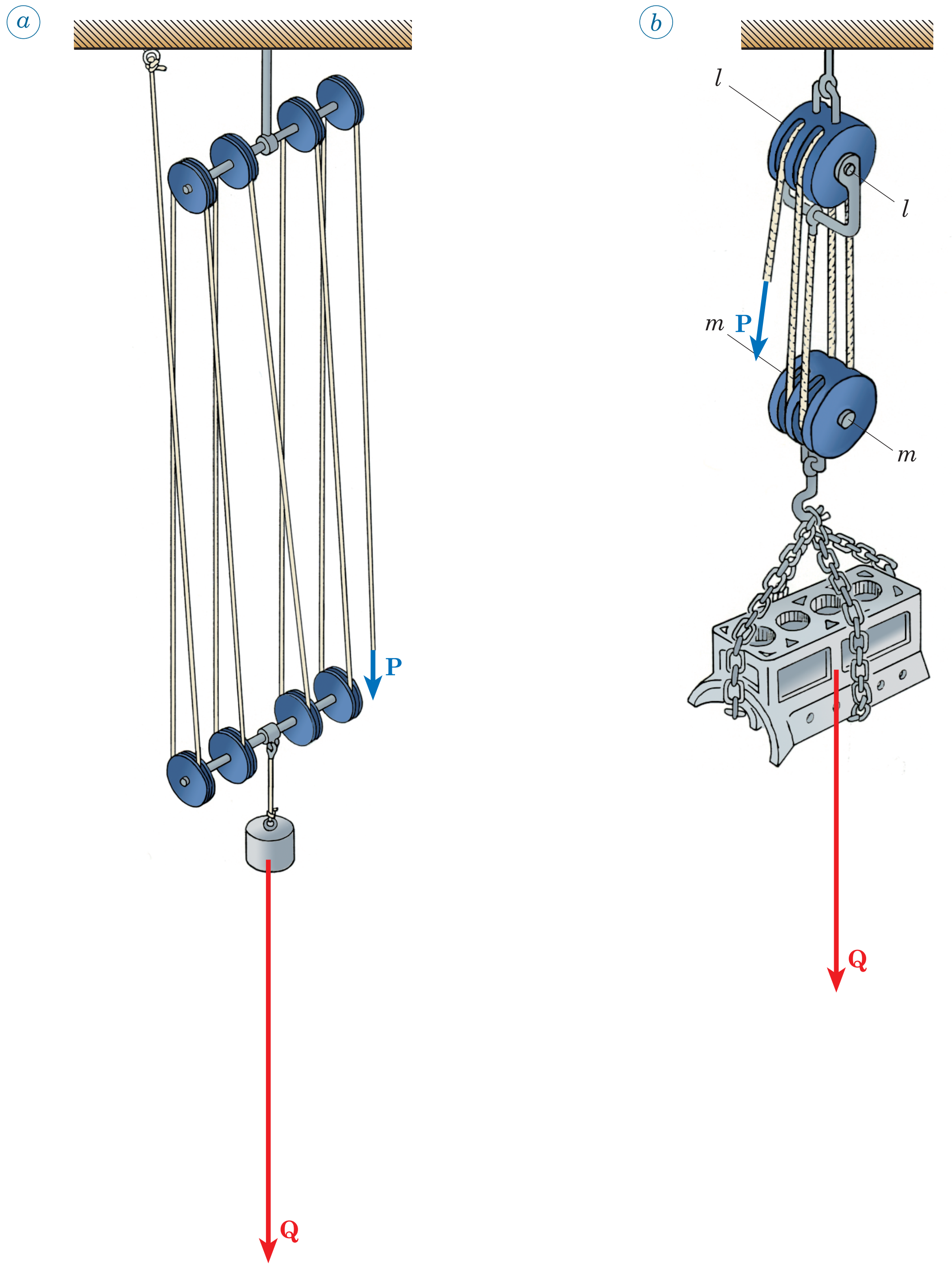


Fig. 5.9 - Paranco multiplo o taglia.

a) Schema di paranco multiplo con quattro pulegge mobili e quattro pulegge fisse; il vantaggio risulta (**5-5**) pari a 8.

b) Paranco multiplo a due pulegge mobili e due pulegge fisse: un'unica fune si avvolge attorno alle pulegge libere di ruotare attorno all'asse *ll* (pulegge fisse) e all'asse *mm* (pulegge mobili); il vantaggio risulta (**5-5**) pari a 4.

5.4 Verricello e argano

Il **verricello semplice** (*Figura 5.10*) è una macchina costituita da due cilindri che ruotano attorno allo stesso asse: la ruota di diametro maggiore $D = 2R$ e il tamburo di diametro minore $d = 2r$; le funi, che vengono avvolte in senso contrario su ruota e tamburo, consentono di sollevare il carico **Q** mediante la forza motrice **P**. In condizioni di equilibrio, la somma dei momenti della forza motrice **P** di braccio R e della forza resistente **Q** di braccio r rispetto al centro O, intersezione dell'asse dei due cilindri coassiali con il piano del disegno, deve risultare uguale a zero. Tenendo poi conto della relazione **5-1** che dà il vantaggio K, risulta:

$$\circlearrowleft \Sigma M_O = 0 \Rightarrow +P \cdot R - Q \cdot r = 0 \Rightarrow P = Q\frac{r}{R} \Rightarrow K = \frac{Q}{P} = \frac{R}{r} \quad \text{[Verricello semplice]} \qquad \textbf{5-6}$$

Il vantaggio risulta tanto maggiore di 1 quanto maggiore è il raggio della ruota R in cui entra la forza motrice P rispetto al raggio del tamburo r da cui esce la forza resistente Q. Presi, ad esempio, una ruota di raggio $R = 200$ mm e un tamburo di raggio $r = 100$ mm, il vantaggio risulterebbe pari a 2 con la possibilità di spostare con la macchina un carico $Q = 2$ kN con il solo impiego della forza motrice $P = 1$ kN. Nelle applicazioni, di solito la ruota viene sostituita da una manovella, ottenendo così il *verricello a manovella*, macchina (*Figura 5.11*) che si incontra facilmente nei cantieri.

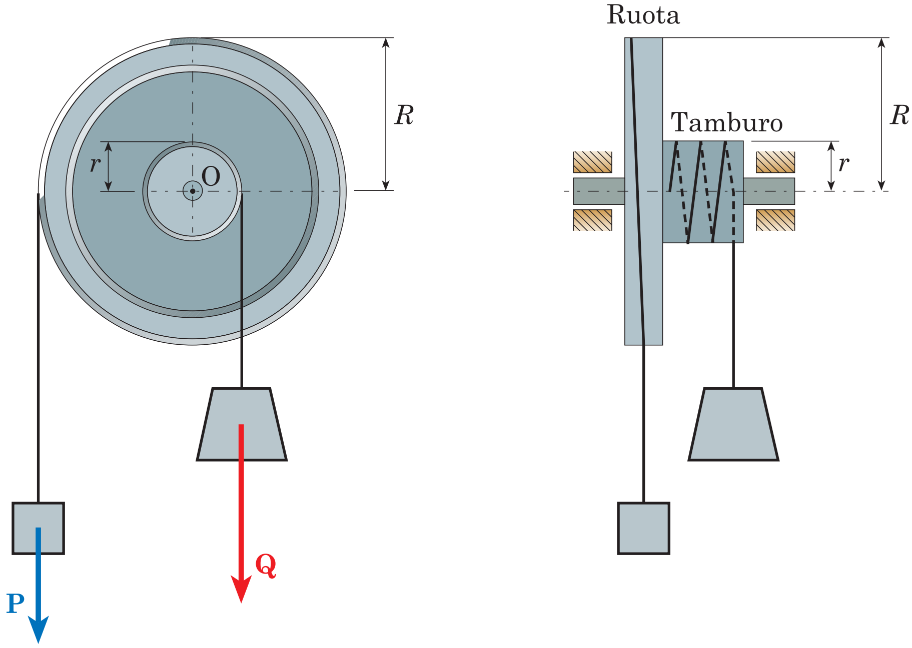


Fig. 5.10 - Verricello semplice: due cilindri di raggio diverso che ruotano intorno al loro asse comune.

L'**argano** è un verricello ad asse verticale avente da due a quattro barre di manovra che possono essere azionate da più uomini (*Figura 5.12*). Il vantaggio è quindi quello stesso del verricello nel momento in cui viene azionata una sola barra di manovra. Se in un argano a due barre di manovra si applica la forza motrice **P** a entrambe le barre, il vantaggio diventa doppio di quello del verricello, mentre diviene quattro volte quando la forza motrice viene applicata a tutte le barre di un argano a quattro barre di manovra.

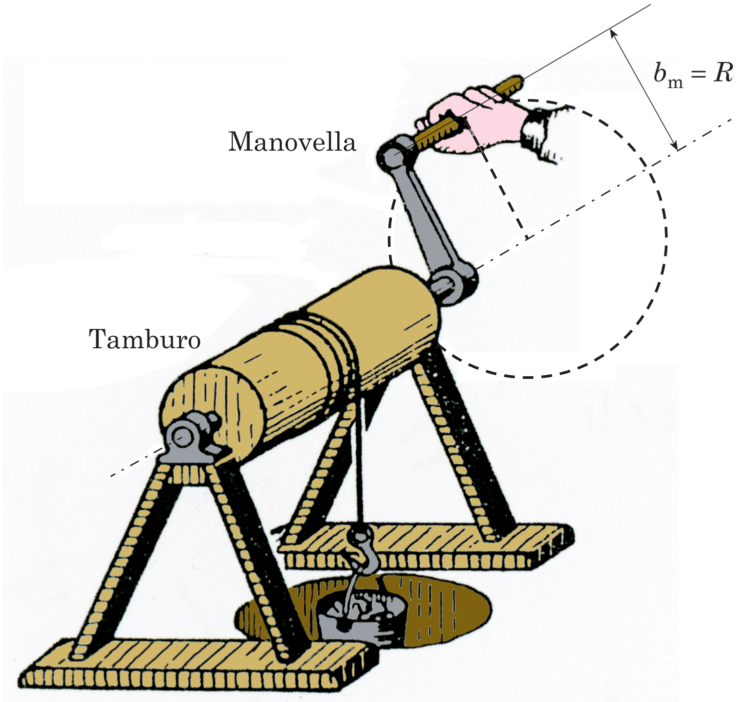


Fig. 5.11 - Verricello a manovella.

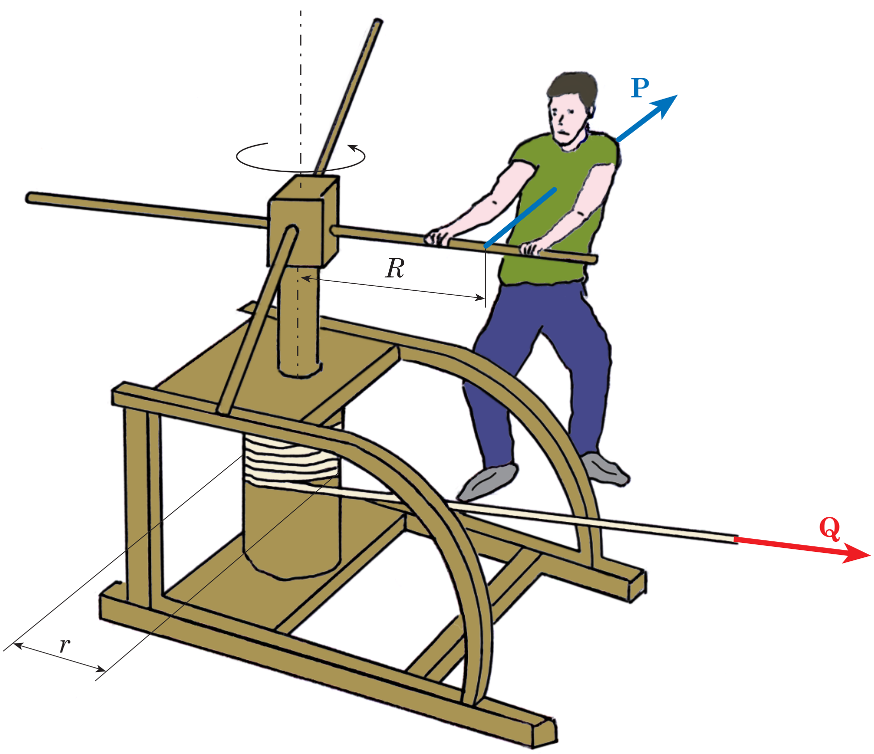


Fig. 5.12 - Argano con quattro barre di manovra.

5.5 Piano inclinato

Il **piano inclinato** è una macchina semplice che, per mezzo di una superficie inclinata, consente di sollevare carichi anche notevoli, ad esempio la cassa di peso **Q** mostrata nella *Figura 5.13*; il piano inclinato si presenta come un triangolo rettangolo avente per lati il cateto orizzontale c, il cateto verticale h[5.2] e l'ipotenusa b legati tra loro dal teorema di Pitagora ($b^2 = c^2 + h^2$). La *pendenza* i, di cui è inclinato il piano, si esprime mediante la tangente di α, angolo rispetto all'orizzontale. Ricordando che (*Tabella IV* di copertina) la tangente dell'angolo α è il rapporto tra il cateto h opposto ad α e il cateto c adiacente, la pendenza i vale:

$$i = \tan\alpha = \frac{h}{c} \qquad \textbf{5-7}$$

Se il corpo, ad esempio il mattone della *Figura 5.14*, è appoggiato su un piano, al peso **Q** del mattone si oppone la reazione **R**, forza normale[5.3] perpendicolare alla superficie di contatto, che impedisce al mattone di sprofondare nel terreno sotto l'azione della forza di gravità. Quando il piano è orizzontale (*Figura 5.14-a*), il peso **Q** del mattone è uguale alla forza normale **R** che fa così equilibrio al carico; quando il piano è inclinato (*Figura 5.14-b*) ed è possibile *trascurare le forze di resistenza generate dagli attriti*[5.4], la componente $\mathbf{Q}_\perp$ del peso normale alla superficie è equilibrata dalla reazione **R** del piano mentre l'altra componente $\mathbf{Q}_\parallel$ del peso **Q** parallela alla superficie, non essendo contrastata da alcuna forza, farà scivolare verso il basso il mattone.

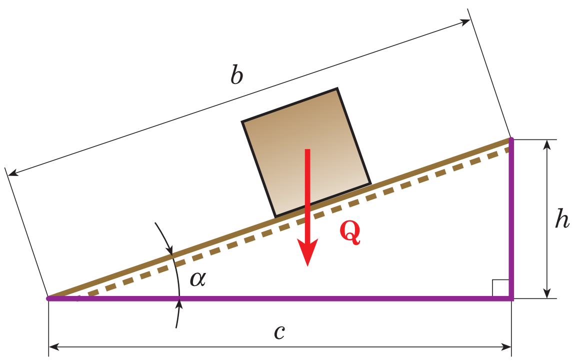


Fig. 5.13 - Piano inclinato su cui viene fatto scivolare il carico **Q** per sollevarlo fino all'altezza h.

5.2 - Nella *Tabella IV* il cateto verticale opposto all'angolo α è indicato con a, mentre qui esso è indicato con h, simbolo che più si presta per indicare un'altezza: l'altezza di sollevamento del piano inclinato.

5.3 - In geometria la parola "normale" significa perpendicolare.

5.4 - Qualora occorra tener conto delle resistenze dovute all'attrito, la componente normale $Q_\perp$ del carico Q determina la comparsa di una forza parallela al piano che va quindi aggiunta all'altra componente di Q per il calcolo della forza motrice P: in presenza di attrito non si può allora più considerare nulla l'influenza della forza normale. In questa Unità si è invece considerato un piano ideale senza attrito in cui la componente normale viene equilibrata dalla reazione del piano e può così essere ignorata al fine del calcolo della forza motrice.

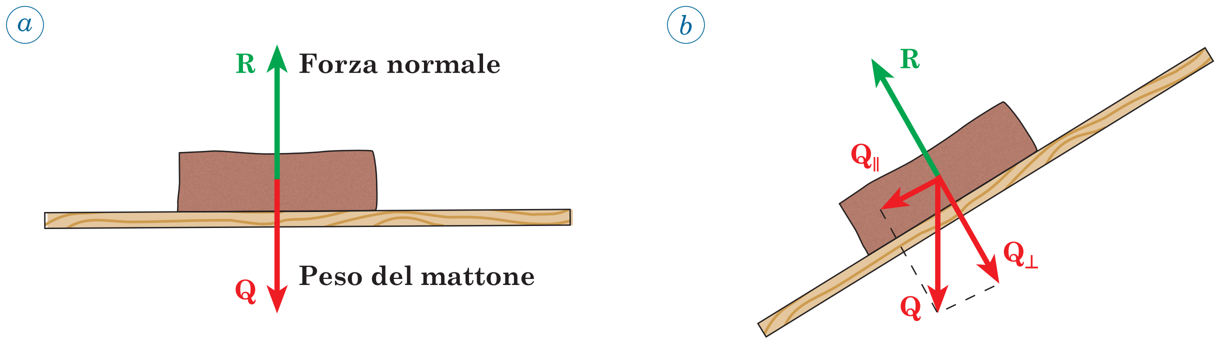


Fig. 5.14 - Mattone appoggiato su un piano.
a) Quando il piano è orizzontale, la forza normale **R** è uguale al peso **Q** del mattone.
b) Quando il piano è inclinato, la forza normale **R** è inferiore al peso **Q** del mattone.

Si raggiunge l'equilibrio del piano inclinato quando viene applicata una forza motrice **P** in grado di contrastare quella componente del carico **Q** che fa scivolare il corpo verso il basso; la forza motrice può essere applicata secondo direzioni diverse, ma due sono quelle che vengono di solito esaminate nelle applicazioni:

– forza motrice parallela al piano inclinato, che è il caso più comune;
– forza motrice orizzontale, che è il modo secondo cui opera la vite.

Quando la *forza motrice* **P** *è parallela al piano inclinato*, il carico **Q** viene scomposto (*Figura 5.15*) nelle due componenti $\mathbf{Q}_{\parallel}$ e $\mathbf{Q}_{\perp}$ rispettivamente parallela e normale al piano inclinato. Utilizzando le definizioni di seno e coseno (*Tabella IV*), si ottengono le componenti del carico Q (*Figura 5.15*):

$$\frac{Q_{\parallel}}{Q} = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad Q_{\parallel} = Q\sin\alpha \qquad\qquad \frac{Q_{\perp}}{Q} = \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad Q_{\perp} = Q\cos\alpha \qquad \mathbf{5\text{-}8}$$

La condizione di equilibrio, necessaria per rendere possibile la salita del carico lungo il piano inclinato, viene raggiunta imponendo $P = Q_{\parallel}$. Sostituendo poi $P = Q\sin\alpha$ nella **5-1**, si ricava il vantaggio K:

$$P = Q\sin\alpha \qquad\qquad K = \frac{Q}{P} = \frac{Q}{Q\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} \qquad [\mathbf{P}\ \text{parallelo al piano inclinato}] \qquad \mathbf{5\text{-}9}$$

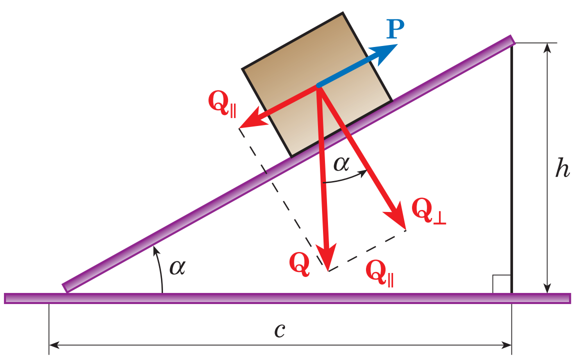


Fig. 5.15 - Forza motrice **P** parallela alla superficie del piano inclinato con scomposizione del carico **Q** in una componente parallela $\mathbf{Q}_{\parallel}$ e in una componente normale $\mathbf{Q}_{\perp}$ alla superficie del piano inclinato.

Quando la *forza motrice* **P** *è orizzontale* (e cioè parallela alla base del piano inclinato), il carico **Q** viene scomposto (*Figura 5.16*) secondo una componente $\mathbf{Q}_H$ orizzontale e ancora nella componente $\mathbf{Q}_\perp$ normale al piano. In base alle definizioni di tangente e coseno (*Tabella IV*), queste componenti adesso valgono (*Figura 5.16*):

$$\frac{Q_H}{Q} = \tan\alpha \quad \Rightarrow \quad Q_H = Q\tan\alpha \qquad\qquad \frac{Q}{Q_\perp} = \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad Q_\perp = \frac{Q}{\cos\alpha} \qquad \textbf{5-10}$$

mentre, in condizioni di equilibrio, la forza motrice P, che si ricava imponendo $P = Q_H$, e il vantaggio K valgono rispettivamente:

$$P = Q\tan\alpha \qquad\qquad K = \frac{Q}{P} = \frac{Q}{Q\tan\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha} \quad [\mathbf{P}\ \text{orizzontale}] \qquad \textbf{5-11}$$

Per valori piccoli dell'angolo α, inferiori a 7°, i due valori del seno e della tangente di α sono circa uguali ($\sin\alpha \cong \tan\alpha$) e quindi la forza motrice P e il vantaggio K possono essere calcolati o con le relazioni **5-9**, dove compare $\sin\alpha$, oppure con le relazioni **5-11**, dove compare $\tan\alpha$, indipendentemente dal fatto che **P** sia parallela al piano inclinato oppure orizzontale. Essendo la pendenza del piano inclinato funzione della tangente dell'angolo α (**5-7**), conviene allora, nel caso di valori piccoli di α, passare attraverso la tangente potendo così esprimere forza motrice P e vantaggio meccanico K direttamente in funzione della lunghezza orizzontale c e dell'altezza di sollevamento h del piano inclinato, dati di solito assegnati inizialmente:

$$P = Q\tan\alpha = Q\frac{h}{c} \qquad\qquad K = \frac{Q}{P} = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{h/c} = \frac{c}{h} \quad [\text{Piano inclinato con } \alpha \le 7°] \qquad \textbf{5-12}$$

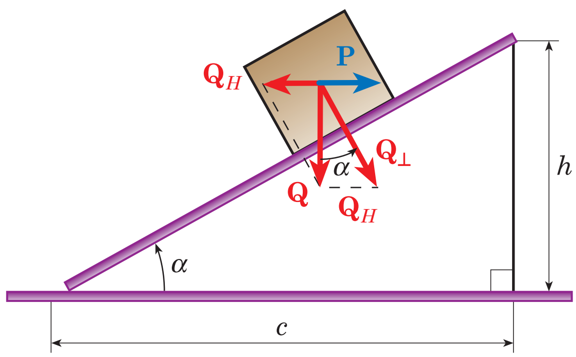


Fig. 5.16 - Forza motrice **P** orizzontale (parallela cioè alla base del piano inclinato) con scomposizione del carico **Q** in una componente orizzontale $\mathbf{Q}_H$ e in una componente normale $\mathbf{Q}_\perp$ alla superficie del piano inclinato.

Esempio 5.3 Piano inclinato

Una catasta di legno di olivo, avente la forma di un parallelepipedo con facce rettangolari di dimensioni 1 m × 0,8 m × 0,5 m, ha una massa volumica (è la massa riferita all'unità di volume introdotta nel *Paragrafo 1.16*) $\rho = 1020$ kg/m^3. La catasta deve venire sollevata fino all'altezza $h = 2$ m, facendola scorrere lungo un piano inclinato che ha per base il lato orizzontale $c = 19$ m (*Figura 5.13*). Si chiede di:

a) calcolare il peso Q della catasta;

b) determinare la lunghezza b (ipotenusa del triangolo rappresentato nella *Figura 5.13*) e l'angolo α di cui è inclinato il piano;

c) scomporre Q nelle due componenti parallela $Q_{\parallel}$ e normale $Q_{\perp}$ al piano inclinato;

d) calcolare, nelle condizioni di equilibrio, la forza motrice P parallela al piano inclinato e il vantaggio K.

SOLUZIONE

a) Moltiplicando il volume V della catasta, prodotto delle tre dimensioni assegnate $V = 1\ \text{m} \times 0{,}8\ \text{m} \times 0{,}5\ \text{m} = 0{,}4\ \text{m}^3$, per la sua massa volumica $\rho = 1020\ \text{kg/m}^3$ si ottiene la massa m della catasta:

$$m = V\rho = 0{,}4\ \text{m}^3 \times 1020\ \text{kg/m}^3 = 408\ \text{kg}$$

La forza resistente Q relativa alla catasta è il peso della catasta stessa, prodotto (**1-10′**) della sua massa m = 400 kg per l'accelerazione di gravità $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$:

$$Q = mg = 408\ \text{kg} \times 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 4002{,}48\ \text{N} \approx 4\ \text{kN} \quad ◀$$

b) L'ipotenusa b del triangolo su cui è appoggiato il carico Q si calcola con il teorema di Pitagora:

$$b^2 = c^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{c^2 + h^2} = \sqrt{(19\ \text{m})^2 + (2\ \text{m})^2} = \sqrt{361\ \text{m}^2 + 4\ \text{m}^2} = 19{,}1\ \text{m} \quad ◀$$

L'angolo α di cui è inclinato il piano si ottiene risolvendo rispetto ad α la relazione **5-7** che dà la pendenza del piano:

$$i = \tan\alpha = \frac{h}{c} = \frac{2\ \text{m}}{19\ \text{m}} = 0{,}1053 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan 0{,}1053 = 6° \quad ◀$$

c) Le due componenti del carico Q rispettivamente parallela $Q_{\parallel}$ e normale $Q_{\perp}$ al piano inclinato sono date dalle **5-8**:

$$Q_{\parallel} = Q\sin\alpha = 4\ \text{kN} \times \sin 6° = 4\ \text{kN} \times 0{,}1045 = 0{,}418\ \text{kN} \approx 0{,}42\ \text{kN} \quad ◀$$

$$Q_{\perp} = Q\cos\alpha = 4\ \text{kN} \times \cos 6° = 4\ \text{kN} \times 0{,}9945 = 3{,}978\ \text{kN} \approx 3{,}98\ \text{kN} \quad ◀$$

d) Nelle condizioni di equilibrio, la forza motrice P parallela al piano inclinato e il vantaggio valgono (**5-9**):

$$P = Q_{\parallel} = Q\sin\alpha = 4\ \text{kN} \times \sin 6° = 0{,}418\ \text{kN} \approx 0{,}42\ \text{kN} \quad ◀$$

$$K = \frac{Q}{P} = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin 6°} = \frac{1}{0{,}1045} = 9{,}5668 \approx 9{,}6 \quad ◀$$

COMMENTI

1. La pendenza del piano inclinato è pari a 0,1053 (in percentuale il 10,53%), mentre l'angolo di cui è inclinato il piano è molto piccolo ($\alpha = 6°$). Trattandosi di un angolo inferiore a 7°, il valore del seno è circa uguale a quello della tangente ($\sin\alpha = \sin 6° = 0{,}1045 \cong \tan\alpha = \tan 6° = 0{,}1051$);

conviene quindi applicare la **5-12**, facendo così a meno della tangente in quanto si possono utilizzare direttamente i valori assegnati dell'altezza di sollevamento h e del cateto orizzontale c:

$$P = Q\frac{h}{c} = 4\ \text{kN}\frac{2\ \text{m}}{19\ \text{m}} = 0{,}421\ \text{kN} \approx 0{,}42\ \text{kN}$$

2. Analogamente alla forza motrice P, conviene calcolare anche il vantaggio, per angoli α molto piccoli, con la **5-12**. Quando invece l'angolo α, di cui è inclinato il piano, risulta maggiore di 7°, occorre distinguere i due casi di forza motrice diretta secondo il piano e di forza motrice orizzontale. Quando la forza motrice P è parallela al piano, il sistema risulta sempre vantaggioso ($K \geq 1$) poiché il seno dell'angolo α, che si trova al denominatore della **5-9**, non supera mai il valore di 1. Quando invece la forza P è orizzontale, il sistema rimane vantaggioso solo fintantoché α, la cui tangente figura al denominatore della **5-11**, rimane inferiore a 45°: la tangente di 45° è infatti uguale a 1 e per angoli α maggiori di 45° la tangente diviene maggiore di 1.

5.6 Cuneo

Nel **cuneo** (*Figure 5.17* e *5.18*) la forza motrice **P** viene applicata sulla *testa*, mentre sui *fianchi* agiscono le forze resistenti **Q**; il punto A, che individua la traccia dello spigolo del prisma, è il *tagliente*. Le due componenti $\mathbf{P}_\perp$ della forza motrice normali ai fianchi sono contrastate dalle due forze resistenti **Q**. L'equilibrio del cuneo richiede che sia chiuso il poligono delle forze (*Figura 5.18-b*); da questo, indicato con α un angolo pari a metà dell'angolo al vertice del prisma (l'angolo doppio 2α viene definito *angolo di apertura* del cuneo), si ricavano la forza motrice P[5.5] e il vantaggio meccanico K del cuneo[5.6]:

$$P = 2 \cdot Q \sin\alpha \qquad K = \frac{Q}{P} = \frac{Q}{2Q\sin\alpha} = \frac{1}{2\sin\alpha} \qquad \text{[Cuneo]} \qquad \textbf{5-13}$$

Il cuneo è tanto più vantaggioso ($K > 1$) quanto più piccolo è l'angolo di semiapertura del cuneo α, il cui seno figura al denominatore della **5-13**. Per angoli α molto piccoli, inferiori a 7°, i due valori del seno e della tangente di α sono circa uguali ($\sin\alpha \cong \tan\alpha$) e quindi la forza motrice P e il vantaggio possono essere calcolati sostituendo $\tan\alpha$ al posto di $\sin\alpha$; in tal caso, essendo (*Figura 5.18-a*) $\tan\alpha = a/c$, le espressioni della forza motrice e del vantaggio divengono:

$$P = 2Q\tan\alpha = 2Q\frac{a}{c} \qquad K = \frac{Q}{P} = \frac{1}{2\tan\alpha} = \frac{c}{2a} \qquad \text{[Cuneo con } \alpha \leq 7°\text{]} \qquad \textbf{5-13}'$$

5.5 - L'equilibrio alla traslazione verticale delle forze cha agiscono sul cuneo è espresso dall'equazione **5-13**, mentre l'equilibrio alla traslazione orizzontale risulta comunque soddisfatto dal momento che le due componenti orizzontali $Q\cos\alpha$ delle forze resistenti Q sono uguali e opposte.

5.6 - Note le dimensioni del cuneo (*Figura 5.18-a*), si ricava l'angolo α mediante la trigonometria (*Tabella IV*) come rapporto tra cateto opposto a e cateto adiacente c all'angolo α ($\tan\alpha = a/c \Rightarrow \alpha = \arctan(a/c)$) oppure come rapporto tra il cateto opposto a e l'ipoteusa b ($\sin\alpha = a/b \Rightarrow \alpha = \arcsin(a/b)$).

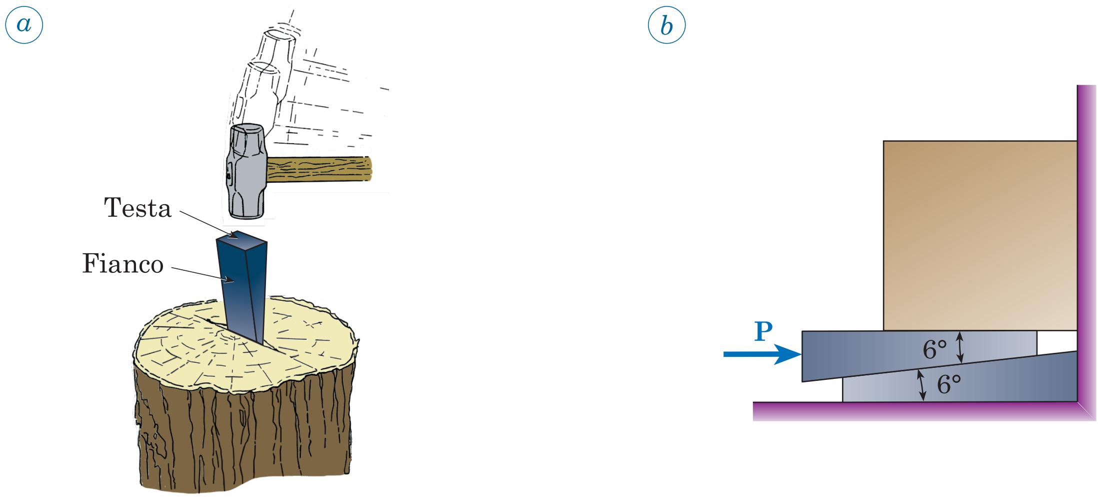


Fig. 5.17 - a) Cuneo con tagliente utilizzato per spaccare un ceppo di legno.
b) Cunei senza tagliente utilizzati per spostare un grosso blocco di pietra.

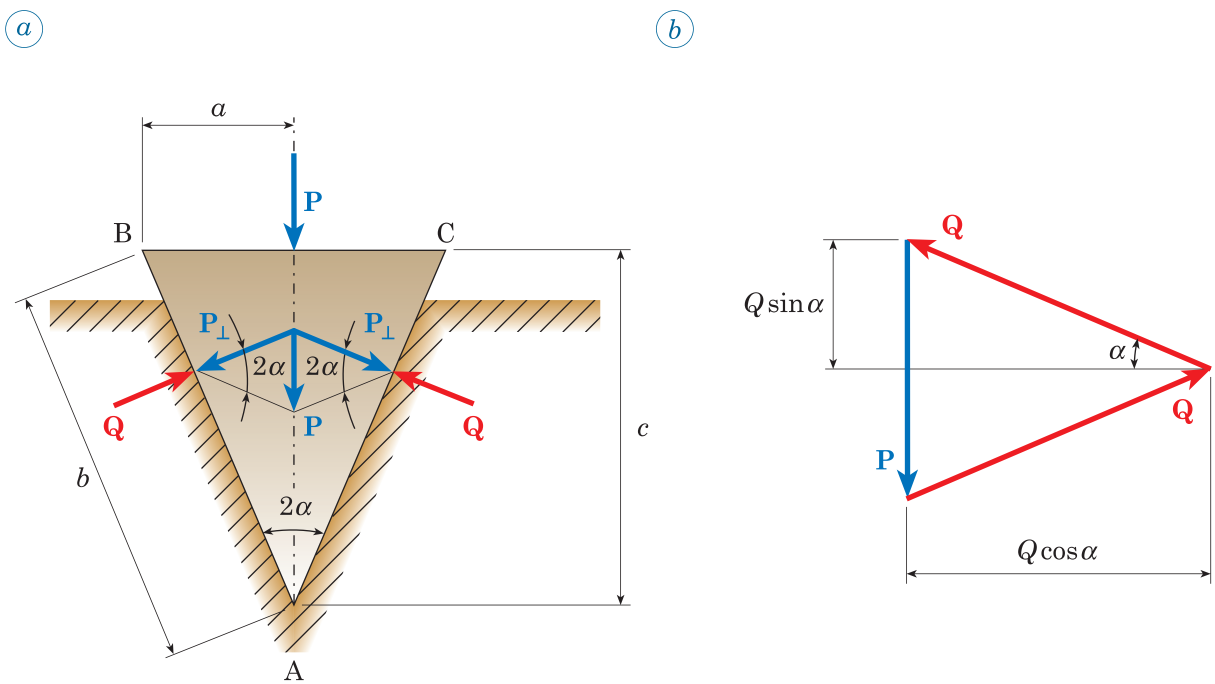


Fig. 5.18 - a) Scomposizione della forza motrice **P** che agisce sulla testa del cuneo nelle due componenti $\mathbf{P}_{\perp}$ normali ai fianchi del cuneo.
b) Poligono delle forze.

5.7 Vite

Nella *filettatura*, un risalto a sezione costante (*filetto*) è avvolto a elica sulla superficie esterna di un elemento, cilindrico o conico che prende il nome di **vite**, o sulla superficie interna di un elemento analogo, che prende il nome di **madrevite**. Vite e madrevite costituiscono un accoppiamento in quanto i due risalti sono fatti in modo che al pieno di uno corrisponda il vuoto dell'altro (*Figura 5.19*). Gli elementi filettati vengono impiegati come organi di *collegamento* (viti, dadi o bulloni) oppure come organi di *trasmissione* (viti di manovra). In questo paragrafo verrà esaminata la **vite di manovra**, utilizzata nei martinetti, nelle presse e in altri meccanismi, e costituita (*Figura 5.20*) da un cilindro detto *nucleo* su cui si avvolge a elica il *filetto*, di solito a sezione quadrata o trapezia (*Figura 5.21*). Il momento M, esercitato mediante la forza **F** di braccio b, provoca la rotazione del nucleo filettato, che, muovendosi verso l'alto a causa della filettatura a elica di inclinazione θ, determina il sollevamento del carico **Q**.

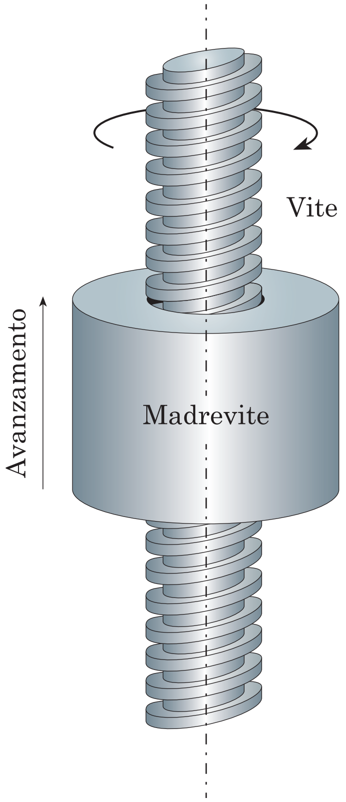


Fig. 5.19 - Particolare di vite e madrevite nella vite di manovra.

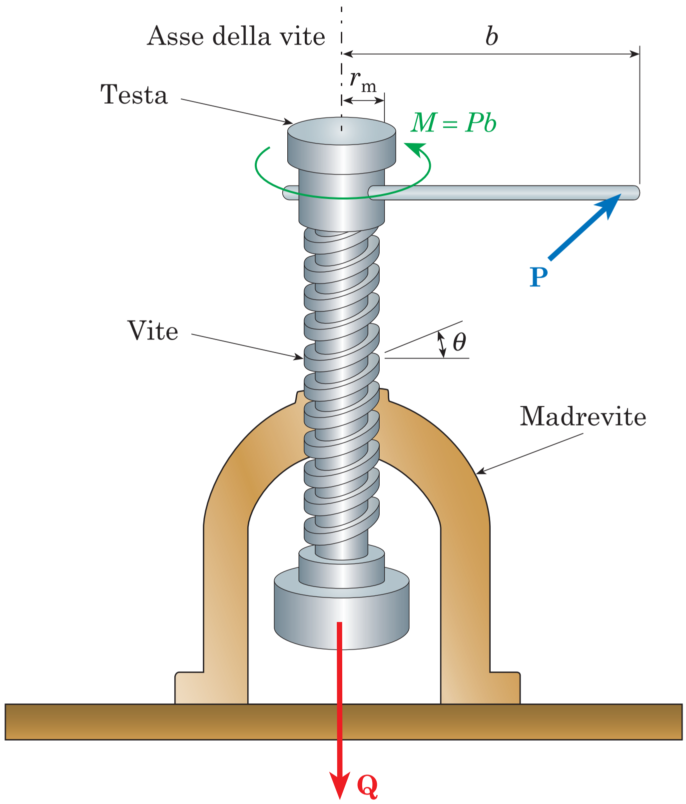


Fig. 5.20 - Vite di manovra impiegata per sollevare corpi.

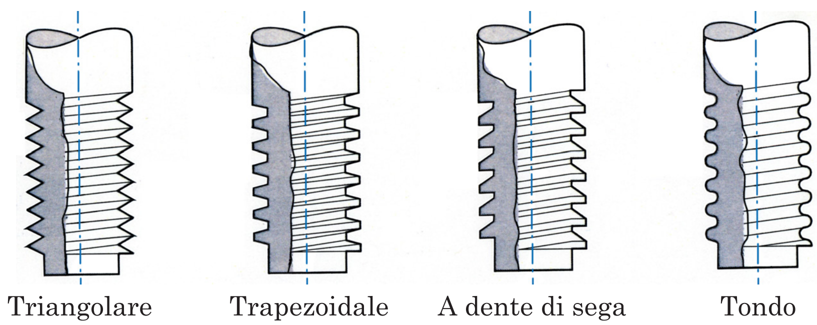


Fig. 5.21 - Vari tipi di profili di filettature.

Elementi caratteristici della vite sono (*Figura 5.22*):

– il *passo* p, distanza tra due punti consecutivi del filetto misurati parallelamente all'asse della vite[5.7];
– il *raggio medio* r_m del filetto, distanza tra l'asse della vite e la generatrice dell'*elica media* (la *generatrice* è una retta parallela all'asse della vite passante per l'elica);
– l'*angolo di inclinazione dell'elica* θ formato dalla tangente all'elica in un punto qualsiasi con un piano perpendicolare all'asse della vite.

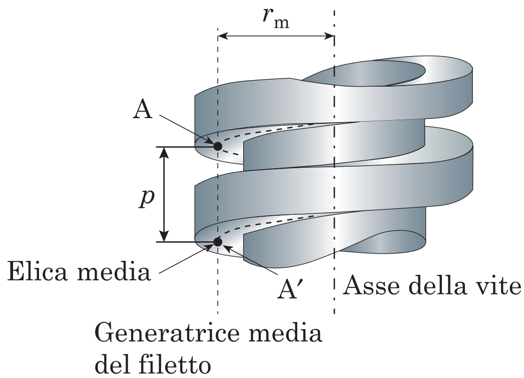


Fig. 5.22 - Elementi caratteristici di una vite con indicati il passo p, il raggio dell'elica media r_m e l'angolo θ di inclinazione dell'elica.

Sviluppando su un piano (*Figura 5.23*) una spira dell'elica media (la *spira* è il tratto di elica compreso tra due punti consecutivi situati sulla stessa generatrice) si ricava un triangolo rettangolo avente per base la lunghezza $2\pi r_m$ della circonferenza relativa all'elica media e per altezza il passo p dell'elica. L'angolo θ di questo triangolo rettangolo è l'inclinazione dell'elica ed è definito (*Tabella IV*) mediante la sua tangente come rapporto tra il cateto verticale p opposto a θ e il cateto orizzontale adiacente $2\pi r_m$, mentre il passo p risulta funzione del *raggio medio* r_m e dell'angolo θ.

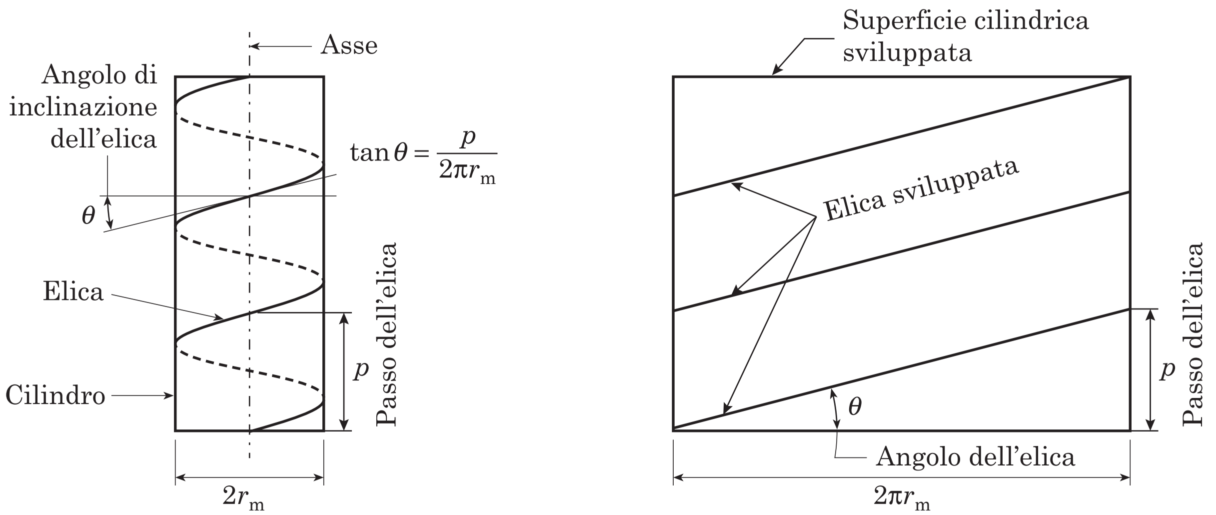
$$\tan\theta = \frac{p}{2\pi r_m} \qquad \textbf{5-14}$$

In questo modo la vite può essere schematizzata (*Figura 5.24*) come un blocco posto su un piano inclinato di pendenza $\tan\theta$, tenuto in equilibrio dalla forza $\mathbf{P'}$ orizzontale (è la forza motrice agente lungo la circonferenza media della vite) e dalla forza resistente $\mathbf{Q}$, che

5.7 - Nel *Paragrafo 5.7* e quindi nel calcolo viene considerata una vite con un unico filetto. Esistono tuttavia viti con doppio (e addirittura triplo) filetto; una vite con doppio filetto è una vite sul cui nucleo sono intrecciati due filetti separati. Occorre allora distinguere tra passo reale L, distanza della quale l'elica della vite avanza in un giro, e passo apparente p, distanza tra due punti consecutivi del filetto. Soltanto nel caso di una vite con un unico filetto il passo reale coincide con quello apparente; in tutti gli altri casi il passo reale L è pari ad n volte il passo apparente p con n numero dei filetti ($L = np$). In presenza di viti con filetto doppio ($n = 2$) oppure triplo ($n = 3$), le relazioni dalla **5-14** alla **5-16′** vanno perciò modificate sostituendo, al passo apparente p, il passo reale $L = np$, che rappresenta effettivamente la distanza della quale avanza la vite in un giro.

viene scomposta secondo una componente $\mathbf{Q}_H$ orizzontale e una componente $\mathbf{Q}_\perp$ normale al piano inclinato. È allora possibile applicare l'equazione **5-11** valida per una forza motrice orizzontale, sostituendo $p/2\pi r_\mathrm{m}$ al posto di $\tan\theta$:

$$P' = Q\tan\theta = Q\frac{p}{2\pi r_\mathrm{m}} \qquad \textbf{5-15}$$



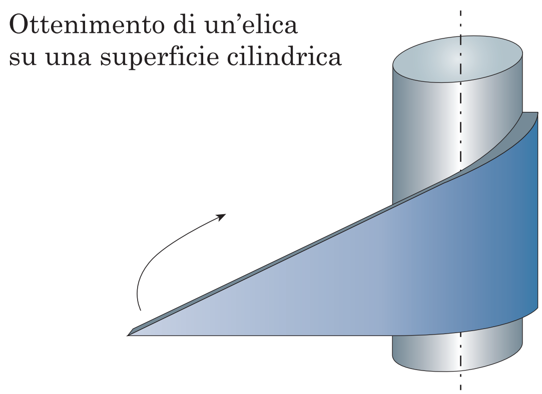


Fig. 5.23 - Sviluppo della superficie cilindrica relativa a una spira dell'elica media: sono indicati l'angolo θ di inclinazione dell'elica, il raggio medio r_m, la circonferenza di base $2\pi r_\mathrm{m}$ e il passo p.

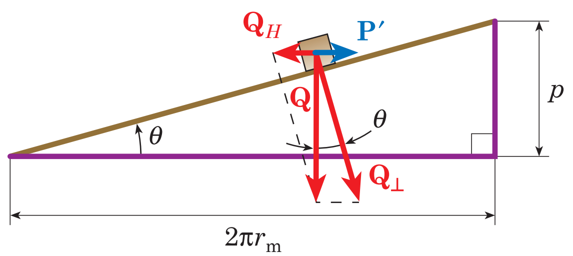


Fig. 5.24 - La vite può essere schematizzata come un blocco su un piano inclinato.

Per l'equilibrio dei momenti rispetto all'asse di rotazione della vite il momento $M = P \cdot b$ della coppia generata dalla forza motrice **P** con braccio di manovra b (*Figura 5.20*) risulta uguale al momento $M = P' \cdot r_m$ della forza **P′** che agisce tangenzialmente alla vite con braccio r_m. Tenendo conto della **5-15** si ha:

$$M = Pb = P'r_m = \left(Q\frac{p}{2\pi r_m}\right)r_m = Q\frac{p}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad P = Q\frac{p}{2\pi b} \qquad \textbf{5-16}$$

Il vantaggio meccanico K della forza motrice P rispetto al carico Q applicato alla vite di manovra risulta allora (**5-1**):

$$K = \frac{Q}{P} = \frac{Q}{Q\left(p/2\pi b\right)} = \frac{2\pi b}{p} \qquad \textbf{5-16}'$$

Il vantaggio può arrivare a valori molto elevati (superiori a 100); esso è direttamente proporzionale alla lunghezza del braccio b della forza motrice e inversamente proporzionale al passo p dell'elica.

Esempio 5.4 Cric a parallelogramma articolato

Un cric viene usato per sollevare un'automobile di cui occorre sostituire una ruota. La vite ha un filetto quadrato di passo $p = 2$ mm. Il proprietario della vettura ha raggiunto con il cric una posizione (*Figura 5.25-a*) sufficientemente elevata per rimuovere il pneumatico sgonfio, ma non ancora sufficiente per mettere il pneumatico gonfio. Determinare la forza motrice P richiesta per sollevare la vettura e il momento corrispondente M.

SOLUZIONE

Per poter applicare la **5-16** che dà la forza motrice P occorre calcolare la forza resistente Q che la vite deve vincere per sollevare l'automobile. Per questo, scrivendo prima l'equilibrio (**4-1**) alla traslazione verticale (*Figura 5.25-b*) e poi quello alla traslazione orizzontale (*Figura 5.25-c*), si ricavano le forze Q' che si trasmettono lungo le aste superiori del parallelogramma a fronte del carico di 3600 N e quindi la forza Q:

$$\overset{+}{\uparrow} \Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2Q' \times \cos 55° - 3600 \text{ N} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q' = \frac{3600 \text{ N}}{2 \times \cos 55°} = 3138{,}2 \text{ N} \approx 3140 \text{ N}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2Q' \times \cos 35° - Q = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = 2 \times 3140 \text{ N} \times \cos 35° = 5144{,}3 \text{ N} \approx 5140 \text{ N}$$

A causa degli angoli del parallelogramma, il cric deve esercitare la forza $Q = 5140$ N che è maggiore della forza peso di 3600 N relativa a parte della vettura. Tenendo presente che il braccio di manovra (*Figura 5.25-a*) vale $b = 15$ cm $= 0{,}15$ m e che il passo della vite è $p = 2$ mm $= 0{,}002$ m, si ha (**5-16**):

$$P = Q\frac{p}{2\pi b} = 5140 \text{ N}\frac{0{,}002 \text{ m}}{2 \times \pi \times 0{,}15 \text{ m}} = 10{,}9 \text{ N} \qquad ◀$$

Il momento M richiesto dal cric è dato dal prodotto della forza motrice $P = 10{,}9$ N per il braccio di manovra $b = 0{,}15$ m:

$$M = Pb = 10{,}9 \text{ N} \times 0{,}15 \text{ m} = 1{,}635 \text{ N·m} \approx 1{,}6 \text{ N·m} \qquad ◀$$

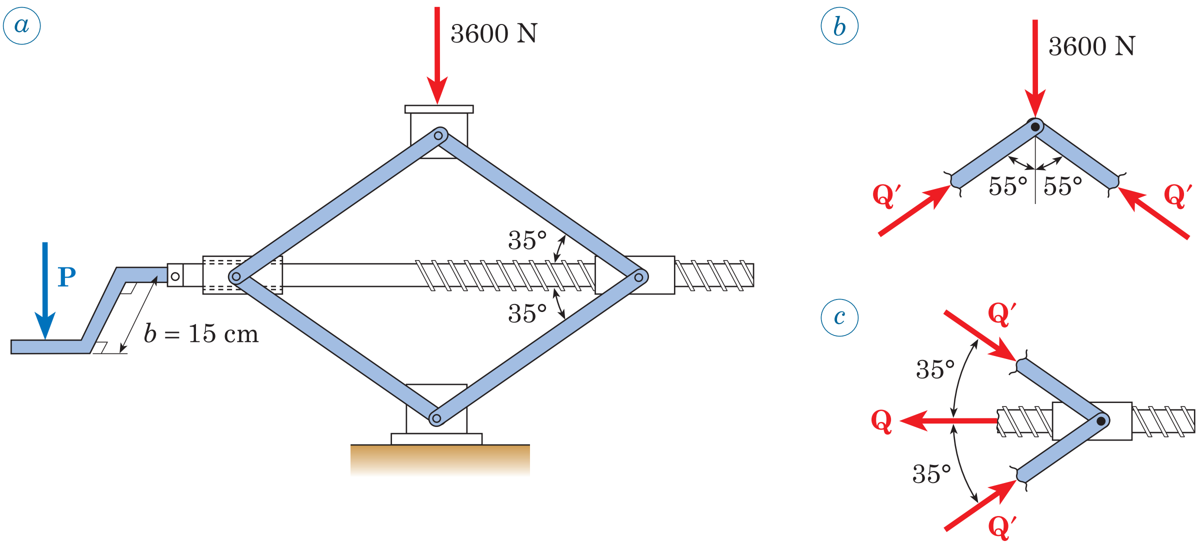
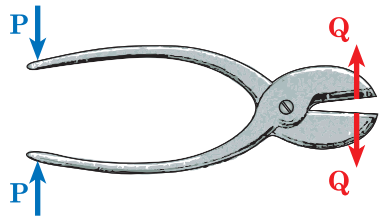
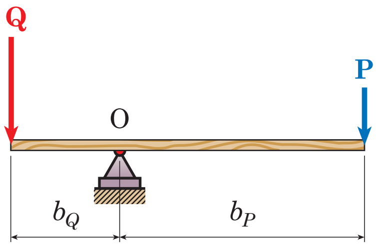
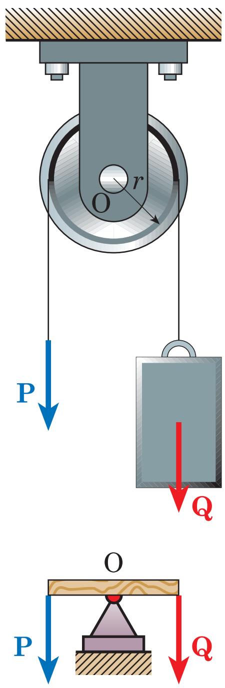
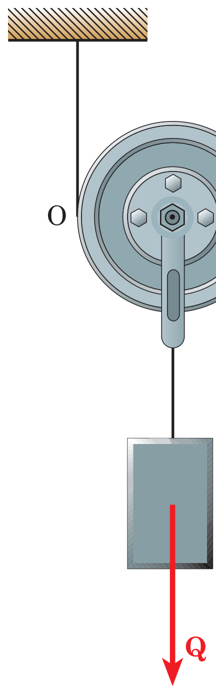


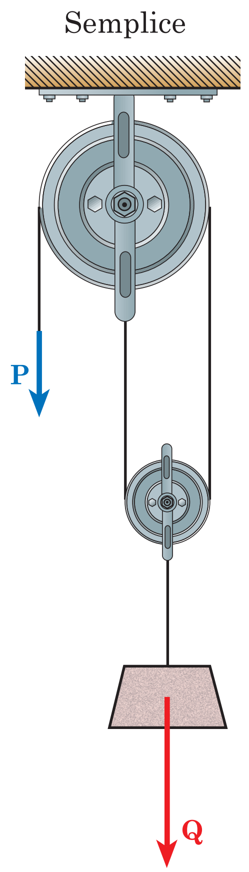
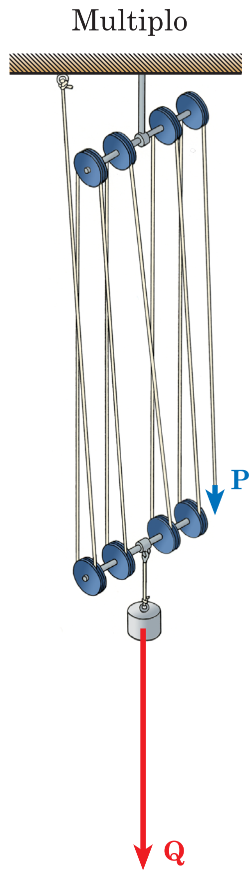
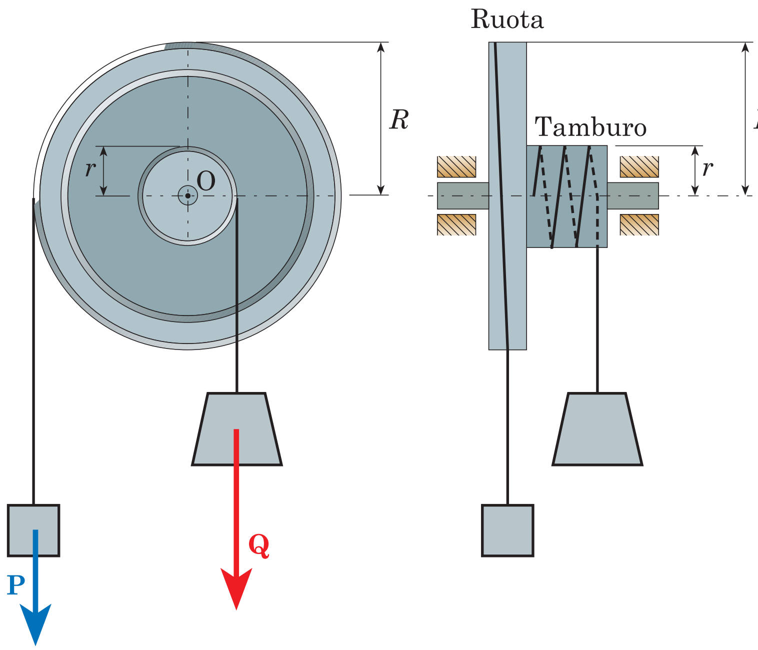
Fig. 5.25 - Cric a parallelogramma articolato trattato nell'*Esempio 5.4*.
a) Condizioni di carico.
b) Diagramma di corpo libero del vertice superiore.
c) Diagramma di corpo libero del vertice di destra.

COMMENTI Il vantaggio meccanico offerto dal cric è molto elevato soprattutto a causa del basso valore del passo; esso si ricava facendo il rapporto Q/P (**5-1**) oppure con la **5-16′**:

$$K = \frac{Q}{P} = \frac{5140\ \text{N}}{10{,}9\ \text{N}} = 471 \quad \text{oppure} \quad K = \frac{2\pi b}{p} = \frac{2 \times \pi \times 0{,}15\ \text{m}}{0{,}002\ \text{m}} = 471$$

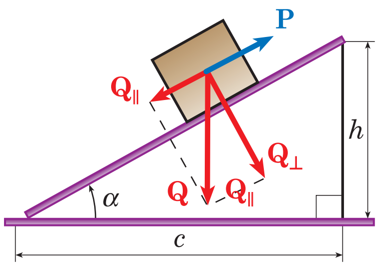
SINTESI

Il *vantaggio meccanico* K della macchina è il rapporto tra la resistenza Q e la forza motrice o potenza P.		$K = \dfrac{Q}{P}$ **5-1** K = vantaggio [–] Q = resistenza [N] P = potenza [N]
Leva: asta rigida libera di ruotare attorno al fulcro e caricata con potenza P e resistenza Q distanti rispettivamente del braccio b_P e del braccio b_Q dal fulcro.		$K = \dfrac{b_P}{b_Q}$ **5-2** K = vantaggio [–] b_Q = braccio della resistenza [m] b_P = braccio della potenza [m]
Carrucola: *fissa* (vantaggio $K = 1$) con carico Q e forza motrice P orientate secondo lo stesso verso; *mobile* (vantaggio $K = 2$) con il difetto di avere il carico Q orientato nel verso opposto alla forza motrice P.	Fissa 	Mobile 

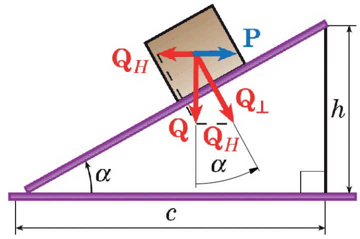
Paranco: *semplice* è l'accoppiamento di una carrucola mobile con una fissa in modo da eliminare il difetto della carrucola mobile; *multiplo* con n pulegge mobili (composto cioè da n paranchi semplici). Il vantaggio è $K = 2n$; per $n = 1$, si ottengono P e K del paranco semplice.		
Verricello semplice: due cilindri di raggio diverso (la ruota di raggio maggiore R e il tamburo di raggio minore r) che ruotano attorno allo stesso asse. La potenza è data da $P = Q\left(r/R\right)$ con vantaggio $K = R/r$.		

Piano inclinato: la pendenza i, di cui è inclinato il piano, è la tangente di α, angolo rispetto all'orizzontale, ed è data dal rapporto tra l'altezza h e la base c ($i = \tan\alpha = h/c$). Il vantaggio è $K = 1/\sin\alpha$, se il carico **P** è parallelo al piano inclinato; è invece $K = 1/\tan\alpha$, se il carico **P** è orizzontale.

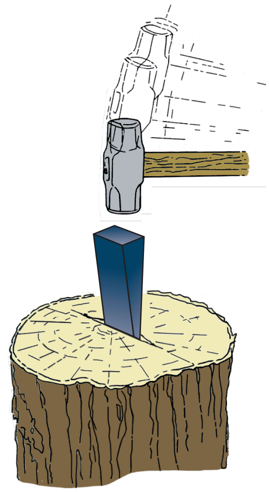
P parallelo al piano inclinato



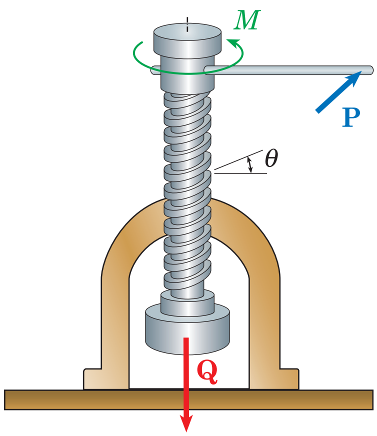
P orizzontale



Cuneo: la forza motrice **P** ($P = 2 \cdot Q \sin\alpha$) viene applicata sulla testa, mentre sui fianchi agiscono le forze resistenti **Q**. Il vantaggio è tanto maggiore, quanto più piccolo è l'angolo α di semiapertura del cuneo $K = 1/(2\sin\alpha)$.



Vite: elementi caratteristici sono il passo p, il raggio medio r_m e l'angolo di inclinazione dell'elica θ: $\tan\theta = p/(2\pi r_m)$. Il carico Q viene equilibrato dalla forza motrice P applicata con il braccio di manovra b. Il vantaggio $K = (2\pi b)/p$ può essere anche molto elevato (superiore a 100).



$$P = Q\frac{p}{2\pi b} \qquad \textbf{5-16}$$

P = forza motrice [N]
Q = carico [N]
p = passo [mm]
b = braccio di manovra [mm]

ESERCIZI

5.1 - Nello schiaccianoci della *Figura 5.4* si vuole rompere una noce con la potenza $P = 100$ N di braccio $b_P = 150$ mm, mentre la resistenza $\mathbf{Q}$ ha il braccio $b_Q = 25$ mm. Determinare il vantaggio K e la compressione Q esercitata sulla noce.

$K = 6$; $Q = 600$ N

5.2 - A woman whose mass is $m = 54$ kg is poised at the right end of a diving board (*Figura 5.26*). The board has negligible weight and is bolted down at the left end, while being supported the length $b_Q = 1.60$ m away by a fulcrum. Find the force P due to the diver's weight (mass m multiplied by the acceleration due to earth's gravity $g = 9.81$ m/s^2), and the forces Q and R that the bolt and the fulcrum O, respectively, exert on the board.

$P = 530$ N; $Q = 954$ N; $R = 1484$ N

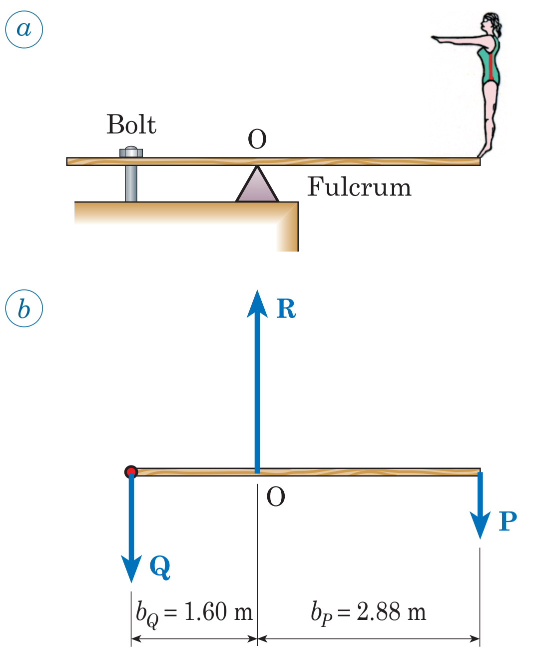


Fig. 5.26 - Trampolino trattato nell'*Esercizio 5.2.*

a) Elementi del trampolino.

b) Condizioni di carico.

5.3 - Un carico $Q = 400$ N è applicato a una leva che ha per bracci $b_Q = 300$ mm e $b_P = 800$ mm (*Figura 5.27*). Calcolare il valore della forza motrice P necessaria per equilibrare la leva. Nel caso in cui fossero $P = 100$ N, $Q = 900$ N e $b_Q = 75$ mm, quale dovrebbe essere la lunghezza del braccio b_P per assicurare l'equilibrio?

$P = 150$ N; $b_P = 675$ mm

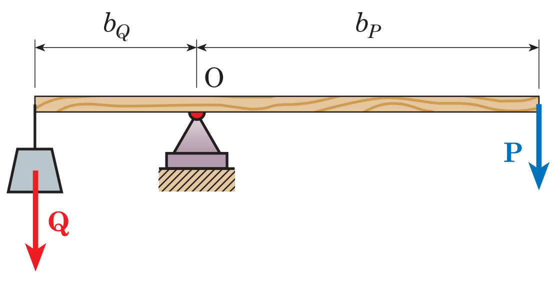


Fig. 5.27 - Leva di primo genere trattata nell'*Esercizio 5.3.*

5.4 - La lunghezza totale b_P della leva di secondo genere della *Figura 5.28* è pari a 625 mm. Sapendo che alla leva viene applicato il carico $Q = 450$ N con un braccio $b_Q = 250$ mm, determinare il valore della forza motrice P. Nel caso in cui fossero $P = 0{,}5$ kN, $Q = 11$ kN e $b_Q = 70$ mm, quale dovrebbe essere la lunghezza del braccio b_P per assicurare l'equilibrio?

$P = 180$ N; $b_P = 1540$ mm

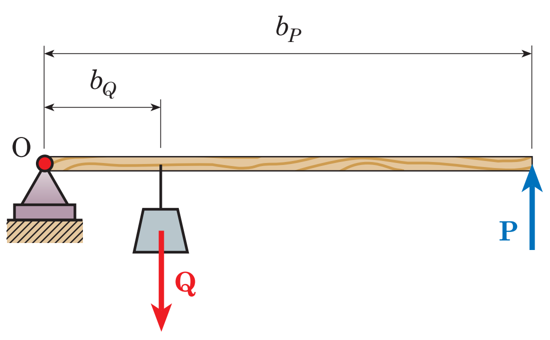


Fig. 5.28 - Leva di secondo genere trattata nell'*Esercizio 5.4.*

5.5 - I carichi $Q_1 = 100$ N, $Q_2 = 150$ N e $Q_3 = 75$ N sono applicati alla leva di *Figura 5.29* con i bracci $b_1 = 100$ mm, $b_2 = 175$ mm e $b_3 = 250$ mm rispetto al fulcro O. Nell'ipotesi che il braccio b_P della forza motrice **P** sia pari a 150 mm, determinare P. Nel caso in cui fosse $P = 100$ N, quale dovrebbe essere la lunghezza del braccio b_P per assicurare l'equilibrio della leva? L'esercizio viene risolto scrivendo l'equilibrio dei momenti di tutti i carichi Q_1, Q_2 e Q_3 e della forza motrice P rispetto al fulcro O.

$P = 366{,}67$ N; $b_P = 550$ mm

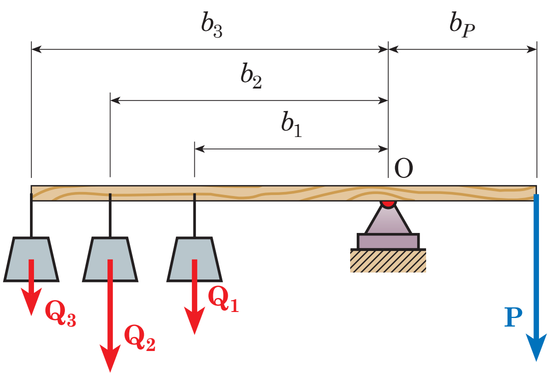


Fig. 5.29 - Leva di primo genere con più carichi trattata nell'*Esercizio 5.5*.

5.6 - Determinare la forza P che fa equilibrio al carico $Q = 120$ N nel sistema di carrucole della *Figura 5.30*.

$P = 30$ N

5.7 - Calcolare il vantaggio e la forza motrice P richiesta da un verricello semplice, come quello della *Figura 5.10*, con una ruota di raggio $R = 300$ mm e un tamburo di raggio $r = 50$ mm, per sollevare un carico $Q = 2000$ N.

$K = 6$; $P = 333{,}3$ N

5.8 - Determinare la forza P che l'uomo deve esercitare per sollevare il carico $Q = 1000$ N utilizzando il sistema di carrucole della *Figura 5.31*.

$P = 250$ N

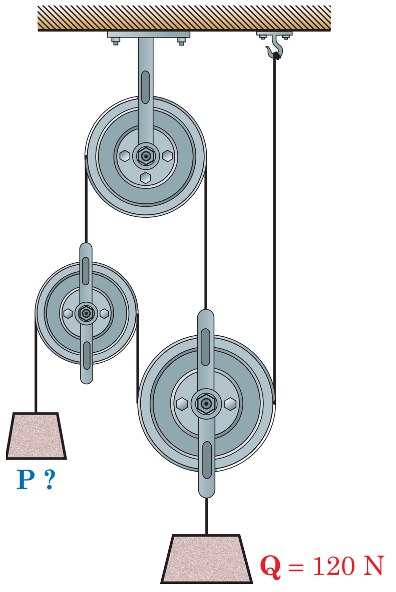


Fig. 5.30 - Sistema con una carrucola fissa e due carrucole mobili trattato nell'*Esercizio 5.6*.

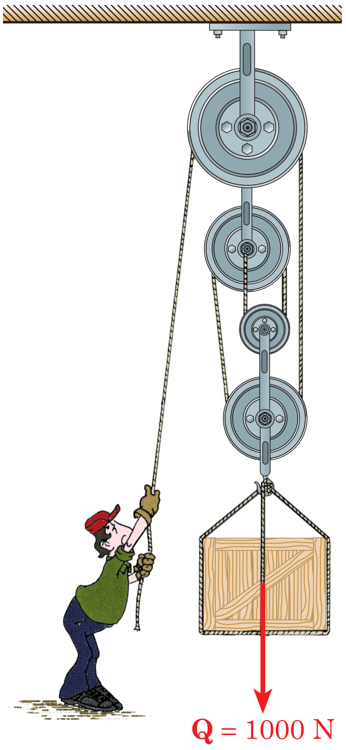


Fig. 5.31 - Sistema con due carrucole fisse e due carrucole mobili trattato nell'*Esercizio 5.8*.

5.9 - Si vuole sollevare una cassa di massa pari a 102 kg facendola scivolare su un piano inclinato come quello illustrato nella *Figura 5.13*. Il piano inclinato forma l'angolo $\alpha = 10°$ con l'orizzontale. Dopo aver calcolato il carico Q esercitato dalla cassa, determinare le due componenti $Q_{\parallel}$ e $Q_{\perp}$ rispettivamente parallela e normale al piano inclinato nonché la forza motrice P parallela al piano inclinato e il relativo vantaggio K.

$Q = 1$ kN; $Q_{\parallel} = 174$ N; $Q_{\perp} = 985$ N;
$P = 174$ N; $K = 5{,}7$

5.10 - Sono assegnate la lunghezza (ipotenusa) $b = 6$ m e l'altezza $h = 3$ m di un piano inclinato, come quello illustrato nella *Figura 5.13*, con il quale si vuole sollevare il carico $Q = 8$ kN. Dopo aver calcolato l'angolo α che il piano forma con l'orizzontale, determinare le due componenti $Q_{\parallel}$ e $Q_{\perp}$ rispettivamente parallela e normale al piano inclinato nonché la forza motrice P parallela al piano inclinato e il relativo vantaggio.

$\alpha = 30°$; $Q_{\parallel} = 4$ kN;
$Q_{\perp} \approx 6{,}9$ kN; $P = 4$ kN; $K = 2$

5.11 - Sapendo che in orizzontale è disponibile una lunghezza di 20 m ($c = 20$ m nella *Figura 5.13*), quale altezza h deve avere un piano inclinato per poter sollevare un carico $Q = 10$ kN con una forza motrice P uguale a 1 kN parallela al piano inclinato? Per risolvere l'esercizio, imporre dapprima il valore del vantaggio Q/P in modo da ricavare l'angolo α del piano rispetto all'orizzontale e poi utilizzare l'equazione della pendenza i per ottenere l'altezza h. Dato il piccolo valore dell'angolo α, si può più semplicemente applicare la relazione del vantaggio valida per angoli α inferiori a 7°.

$h = 2$ m

5.12 - Un cuneo, come quello della *Figura 5.18-a*, ha una testa larga 200 mm ($a = 100$ mm) ed è alto 950 mm ($c = 950$ mm). Dopo aver calcolato l'angolo di semiapertura del cuneo α, determinare la forza motrice P e il vantaggio K richiesti per vincere una forza resistente $Q = 2$ kN.

$\alpha = 6°$; $P = 0{,}418$; $K = 4{,}783$

5.13 - Determinare l'intensità Q delle forze resistenti esercitate sui fianchi di un cuneo avente l'angolo di semiapertura $\alpha = 6°$ (*Figura 5.32*), sapendo che la forza motrice applicata sulla testa del cuneo vale $P = 3{,}2$ kN.

$Q = 15{,}2$ kN

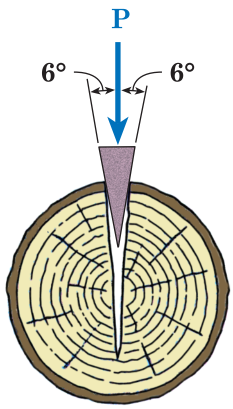


Fig. 5.32 - Cuneo trattato nell'*Esercizio 5.13*.

5.14 - La posizione di un veicolo fuoristrada è controllata da un cric a parallelogramma (*Figura 5.33*) composto dalla vite ABC a un solo filetto (destrogira in A e sinistrogira in C). Sapendo che la vite ha un filetto quadrato di passo $p = 2{,}5$ mm, determinare il momento M e la corrispondente forza motrice P (nell'ipotesi che il braccio di manovra sia $b = 15$ cm) che occorre esercitare per spostare il fuoristrada. Per risolvere l'esercizio si segua il metodo illustrato nell'*Esempio 5.4* trovando prima la forza Q' trasmessa lungo i lati superiori del parallelogramma e quindi la forza resistente Q. Nel determinare il momento M occorre tener conto che l'azione della vite si esercita nei due punti A e C (*Figura 5.33*) e non in un solo punto come nel caso dell'*Esempio 5.4* (*Figura 5.25-a*).

$Q' = 8771{,}4$ N; $Q = 16.484$ N; $M = 13{,}12$ N·m; $P = 87{,}45$ N

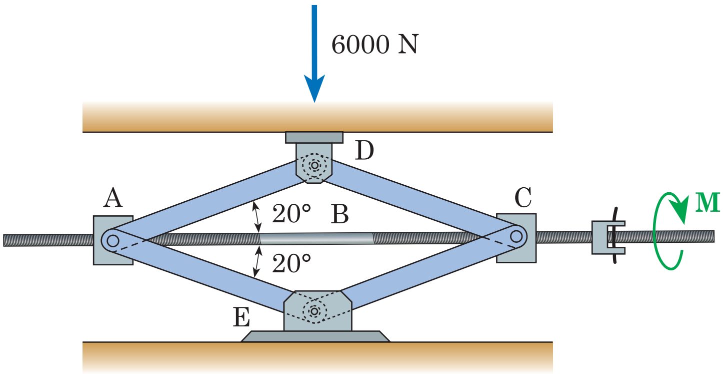


Fig. 5.33 - Cric a parallelogramma trattato nell'*Esercizio 5.14*.

VERIFICA DEI PREREQUISITI

1. Due variabili x e y tali che quando raddoppia una (ad esempio la x) raddoppia anche l'altra (la y) sono ....

2. Qual è il valore della costante di proporzionalità k nell'equazione $x = 2y$? $k =$ ....

3. Nell'equazione $x = (2y)/z$, la variabile x è .... proporzionale a y e .... proporzionale a z.

4. Risolvere l'equazione di primo grado $12 - 2x = x$: $x =$ ....

5. Risolvere rispetto all'incognita x l'equazione $a - b - cx = 0$ in cui i termini a, b e c sono noti: $x =$ ....

6. In un triangolo rettangolo (*Figura* di *Tabella IV*) con gli angoli $\beta = 90°$ e $\gamma = 50°$, determinare il valore dell'angolo α e scrivere l'espressione dei cateti a e c in funzione dell'ipotenusa b:

$\alpha =$ ....

$a =$ ....

$c =$ ....

7. Determinare il valore dell'angolo $\alpha = \arctan(0{,}213)$: $\alpha =$ ....

8. Il corpo rigido è in equilibrio quando la somma delle forze (risultante) e la somma dei momenti delle forze rispetto a un punto O scelto in modo arbitrario (momento risultante) sono ....

9. Quanti e quali sono i gradi di libertà del corpo rigido nel piano che i vincoli sono chiamati a impedire:

a) 1 grado di libertà relativo a una traslazione generata dalla componente della forza secondo l'asse x;
b) 2 gradi di libertà relativi a due traslazioni generate dalle componenti delle forze secondo i due assi x e y;
c) 3 gradi di libertà relativi a due traslazioni generate dalle componenti delle forze secondo i due assi x e y e la rotazione attorno all'asse z normale al piano x-y e passante per l'origine O degli assi x e y.

10. L'incastro è un vincolo semplice. Vero □ Falso □

VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO

1. Una macchina trasforma le forze immesse, la cui risultante viene chiamata ...., nelle forze rese, la cui risultante viene chiamata ....

2. Il vantaggio K di una macchina ha:

a) le dimensioni di una forza;
b) non ha dimensioni.

3. Una macchina con vantaggio $K < 1$ è indifferente. Vero □ Falso □

4. La leva di primo genere è sempre vantaggiosa. Vero □ Falso □

5. Scrivere il vantaggio K di una macchina in funzione dei bracci di potenza e resistenza per una leva.

6. Per quale motivo si usa la carrucola fissa?

a) Perché il vantaggio K è maggiore di 1.
b) Per modificare la retta d'azione.

7. Il vantaggio K di una carrucola mobile è:

a) > 1
b) < 1
c) $= 1$

8. Il verricello a manovella viene solitamente impiegato nei ....

9. La pendenza i di un piano inclinato, che ha per base il lato orizzontale $c = 16{,}26$ m, per altezza $h = 2{,}00$ m e per ipotenusa $b = 16{,}38$ m, viene definita da:

a) $i = \tan\alpha = (2{,}00 \text{ m})/(16{,}26 \text{ m}) = 0{,}123$

b) $i = \cos\alpha = (16{,}26 \text{ m})/(16{,}38 \text{ m}) = 0{,}993$

c) $i = \sin\alpha = (2{,}00 \text{ m})/(16{,}38 \text{ m}) = 0{,}122$

10. Scrivere l'espressione del vantaggio nel cuneo per angoli $\alpha \leq 7°$: $K =$ ....

11. Il vantaggio K della vite di manovra è .... alla lunghezza del braccio b della forza motrice e .... al passo p dell'elica.