8.5 Pendolo semplice

Un **pendolo semplice** consiste in una massa m sospesa a un supporto rigido per mezzo di un filo di lunghezza l; se la massa viene tirata da un lato e quindi rilasciata, la forza di gravità mg genera un'oscillazione da una parte e dall'altra del punto di riposo. Allorché la massa del pendolo viene spostata da un lato rispetto alla verticale di un angolo θ (*Figura 8.15*), la componente perpendicolare al filo della forza di gravità genera la forza $F = -mg \sin\theta$, preceduta dal segno meno perché questa è una forza di richiamo che tende appunto a ridurre l'angolo θ. Lo spostamento s, lunghezza dell'arco lungo il quale il pendolo oscilla, vale $s = l\theta$; ma se l'angolo θ è sufficientemente piccolo, $\sin\theta$ può essere approssimato dall'angolo θ [rad]: $\sin\theta \approx \theta$. Per angoli piccoli, inferiori a 10° (0,175 rad), è possibile confondere il seno, così come la tangente, con l'angolo (relazione **A.2-10** dell'*Appendice*). Se, ad esempio, si prende un angolo θ di 0,07 rad (pari a 4°), i valori di seno e tangente coincidono praticamente con θ:

$$\sin(0{,}07) = 0{,}069942 \approx \tan(0{,}07) = 0{,}070114 \approx \theta = 0{,}07$$

La forza di richiamo F risulta allora proporzionale all'angolo θ e quindi, essendo $s = l\theta$, allo spostamento s:

$$F = -mg\sin\theta = -mg\theta = -\frac{mg}{l}s \quad \text{<< Solo angoli piccoli >>}$$

Questa equazione è formalmente identica a quella di una molla (**8-6**) fatta eccezione per la costante di elasticità della molla k che figura al posto di mg/l; si ricava allora il periodo T (oppure la frequenza f) sostituendo k nella **8-7** con mg/l:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/l}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{<< Solo angoli piccoli >>} \qquad \textbf{8-9}$$

Il periodo del pendolo è indipendente dalla massa del pendolo e dall'ampiezza dell'angolo, purché quest'ultimo sia piccolo; nella formula del periodo T non figurano infatti né la massa m né l'angolo θ. La costanza del periodo del pendolo – tutte le piccole oscillazioni, anche di ampiezza diversa, si compiono nello stesso periodo di tempo (*oscillazioni isocrone*) – fu scoperta da Galileo nel sedicesimo secolo.

Modello del pendolo di Galileo Galilei realizzato che riproduce l'invenzione del 1604.

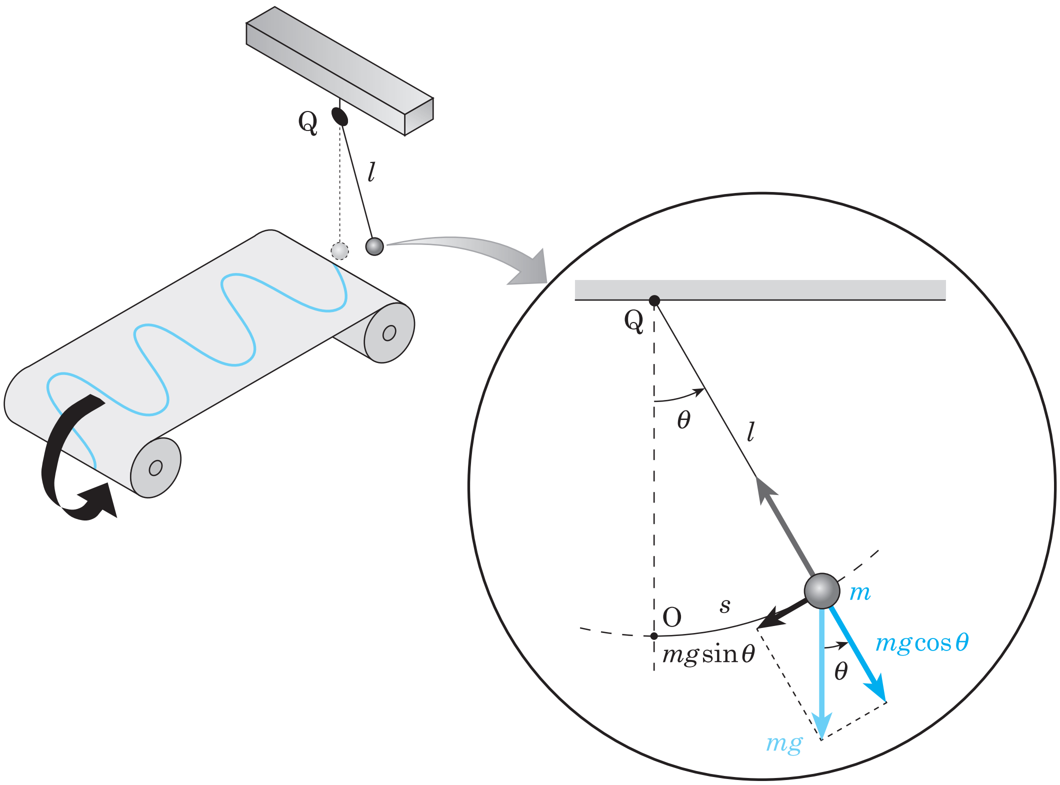


Fig. 8.15 - Un pendolo semplice, sospeso al perno Q, ha la massa m che oscilla avanti e indietro passando ogni volta per O. Se l'angolo θ è piccolo, l'oscillazione può essere considerata quella di un moto armonico semplice.

Esempio 8.7 Pendolo semplice

Il pendolo semplice della *Figura 8.16* ha compiuto 80 piccole oscillazioni ($\theta = 4°$) in 200 s. Calcolare:

a) la lunghezza l del pendolo;

b) velocità v_{max} e accelerazione a_{max} massime lineari della massa del pendolo;

c) la velocità angolare massima del pendolo;

d) la velocità lineare v della massa del pendolo per uno spostamento lungo l'arco pari a metà dell'ampiezza.

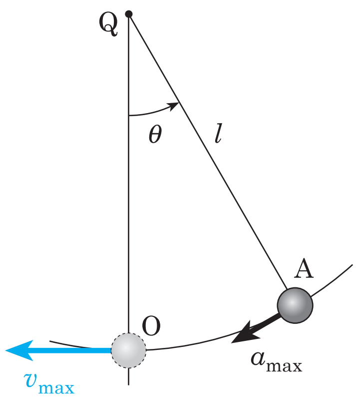


Fig. 8.16 - Pendolo trattato nell'*Esempio 8.7*.

SOLUZIONE

a) Il periodo T del pendolo è misurato dal tempo impiegato a compiere 80 oscillazioni; noto il periodo, con la **8-9**, si risale alla lunghezza l del pendolo.

$$T = \frac{\text{tempo totale}}{\text{numero oscillazioni}} = \frac{200\ \text{s}}{80} = 2{,}5\ \text{s}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(2{,}5\ \text{s})^2 \times 9{,}81\ \text{m/s}^2}{4 \times \pi^2} = 1{,}55\ \text{m}$$ ◀

b) Dopo aver convertito in radianti l'angolo θ (*Paragrafo 1.9*), si calcolano prima la velocità angolare ω del *moto armonico* (**8-5**) e l'ampiezza A dell'oscillazione (**6-10**); in quest'ultima equazione il raggio r corrisponde alla lunghezza l del pendolo. Quindi, con la **8-4**, si calcolano velocità e accelerazione della massa del pendolo: la velocità è massima nel punto intermedio O ($x = 0$); l'accelerazione è massima nelle due posizioni estreme quando lo spostamento x lungo l'arco è massimo in corrispondenza dell'ampiezza dell'arco $\overset{\frown}{OA}$.

$$\theta = 4°\frac{\pi}{180} = 0{,}07\ \text{rad} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2{,}5\ \text{s}} = 2{,}51\ \text{rad/s}$$

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{\overset{\frown}{OA}}{l} \quad \Rightarrow \quad A = \overset{\frown}{OA} = l\theta = 1{,}55\ \text{m} \times 0{,}07\ \text{rad} = 0{,}1085\ \text{m}$$

$$v_{max} = \left|-\omega\sqrt{A^2}\right| = \omega A = 2{,}51\ \text{rad/s} \times 0{,}1085\ \text{m} = 0{,}272\ \text{m/s}$$ ◀

$$a_{max} = \left|-\omega^2 A\right| = (2{,}51\ \text{rad/s})^2 \times 0{,}1085\ \text{m} = 0{,}684\ \text{m/s}^2$$ ◀

c) La velocità angolare del pendolo è la velocità lineare della massa del pendolo divisa per la lunghezza l del pendolo (**6-13**); il valore massimo viene perciò raggiunto in corrispondenza della velocità massima v_{max}.

$$\text{Velocità angolare massima} = \frac{v_{max}}{l} = \frac{0{,}272\ \text{m/s}}{1{,}55\ \text{m}} = 0{,}175\ \text{rad/s}$$ ◀

d) Per uno spostamento lungo l'arco pari a metà dell'ampiezza, cioè a 2° dalla posizione intermedia O, la velocità lineare v della massa del pendolo è data dalla **8-4**:

$$x = \frac{A}{2} = \frac{0{,}1085\ \text{m}}{2} = 0{,}054\ \text{m}$$

$$v = \left|-\omega\sqrt{A^2 - x^2}\right| = 2{,}51\ \text{rad/s} \times \sqrt{(0{,}1085\ \text{m})^2 - (0{,}054\ \text{m})^2} = 0{,}236\ \text{m/s}$$ ◀

8.6 Risonanza

Il termine *vibrazioni naturali* (o *libere*) viene usato per descrivere le vibrazioni di un corpo quando esso oscilla sotto l'azione della propria forza di richiamo, sia questa di origine elastica oppure dovuta alla gravità, senza l'intervento di alcuna forza esterna. Le equazioni utilizzate fino ad ora per il pendolo semplice e il sistema molla-massa si riferiscono appunto a vibrazioni libere per cui si è calcolata la *frequenza naturale* di vibrazione.

Il termine *vibrazioni forzate* viene invece utilizzato allorché viene applicato al sistema oscillante una forza esterna periodica oppure intermittente. Se si vuole ottenere un'ampiezza notevole delle oscillazioni di un'altalena, occorre spingere il bambino, che vi è seduto, in modo regolare e ripetitivo facendo sì che la frequenza delle spinte sia pari alla frequenza naturale dell'altalena. È questo un esempio di vibrazioni forzate in cui la forza esterna applicata ha una frequenza vicina a quella della frequenza naturale del sistema. **Risonanza** è appunto la condizione per cui coincidendo la frequenza della forza esterna applicata con la *frequenza naturale* (o *frequenza critica*) del sistema si verifica un'ampiezza delle oscillazioni estremamente elevata, tendente a infinito nel caso teorico di assenza completa di smorzamento (*Figura 8.17*). Queste *vibrazioni* vengono tuttavia *smorzate* dagli attriti sempre presenti nei sistemi reali; in molte applicazioni lo smorzamento delle vibrazioni viene ottenuto facendo ricorso ad apparecchiature specifiche (*Figura 8.18*).

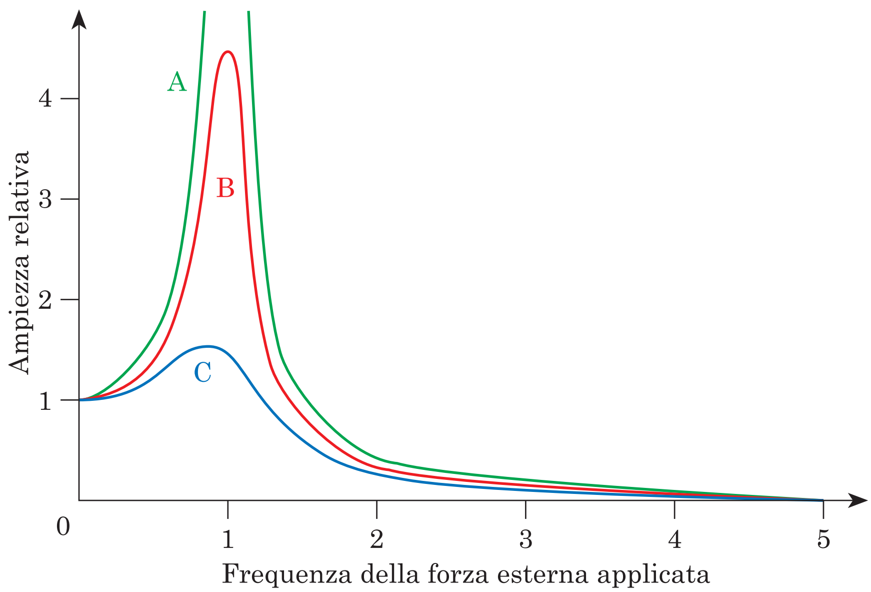


Fig. 8.17 - Ampiezza delle vibrazioni in funzione della frequenza della forza esterna applicata espressa come multiplo della frequenza naturale del sistema: 1 è la frequenza naturale del sistema. La curva A è la curva teorica di risonanza in assenza completa di smorzamento, mentre le curve B e C corrispondono a due condizioni di smorzamento: più debole per B e più elevato per C.

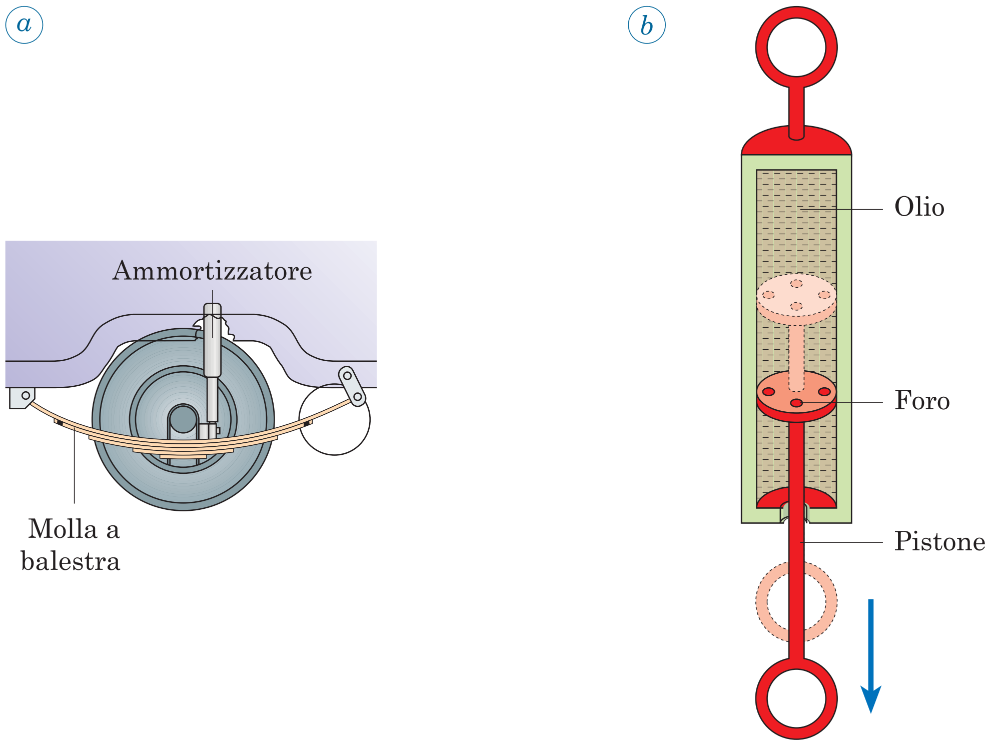


Fig. 8.18 - Schema semplificato di un ammortizzatore di una vettura. Il pistone è situato in un serbatoio pieno d'olio; allorché il pistone si muove reagendo a una gobba della strada, l'olio che passa attraverso i fori genera delle forze viscose che smorzano le oscillazioni.

Esempio 8.8 Risonanza da sporgenze trasversali su una strada

Una pista di collaudo presenta delle ondulazioni trasversali disposte ogni 2 m (*Figura 8.19*). A quale velocità v si manifesteranno gli effetti della risonanza in un carrello le cui sospensioni elastiche presentano una deformazione statica $x = 150$ mm?

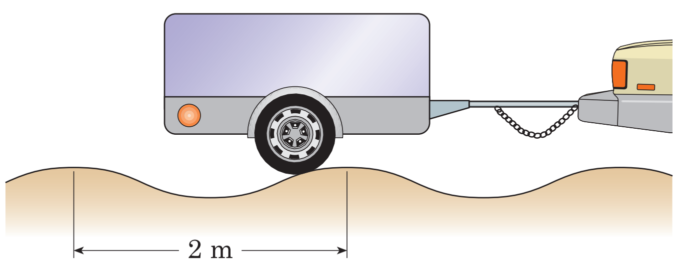


Fig. 8.19 - Risonanza sulle molle di un carrello dell'*Esempio 8.8*.

SOLUZIONE

La frequenza $f_{\text{forzante}} = v/(2\ \text{m})$ con cui il carrello incontra le ondulazioni, data dal rapporto tra la velocità v e la distanza di 2 m tra due ondulazioni successive, rappresenta la frequenza forzante generata dalla forza esterna periodica. La risonanza si verifica quando tale frequenza uguaglia la frequenza naturale (o critica) $f_{\text{naturale}} = (1/2\pi)\sqrt{k/m}$, espressa dalla **8-7**.

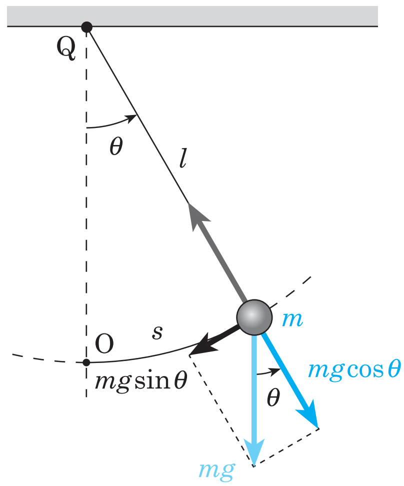
A carrello fermo, la deformazione elastica x delle molle della sospensione sotto il peso del carrello mg vale, per la **8-6**, $F = mg = -kx$, essendo m la massa del carrello, g l'accelerazione di gravità e k la costante elastica delle molle. La costante elastica risulta perciò in valore assoluto $k = (mg)/x$. Si sostituisce questa espressione di k nella formula della frequenza naturale e si impongono le condizioni di risonanza uguagliando le due frequenze: forzante e naturale; risolvendo, si ottiene la velocità v a cui si manifesta la risonanza del sistema.

$$f_{\text{naturale}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(mg)/x}{m}} = \frac{1}{2\times\pi}\sqrt{\frac{9{,}81\ \text{m/s}^2}{0{,}15\ \text{m}}} = 1{,}29\ \text{Hz}$$

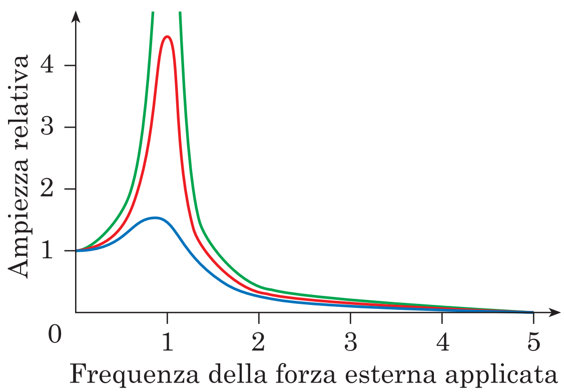
$$f_{\text{forzante}} = f_{\text{naturale}} \quad\Rightarrow\quad \frac{v}{2\ \text{m}} = 1{,}29\ \text{Hz} \quad\Rightarrow\quad v = 1{,}29\ \text{Hz}\times 2\ \text{m} = 2{,}58\ \text{m/s}$$

SINTESI

Un *pendolo semplice* consiste in una massa m sospesa a un supporto rigido per mezzo di un filo di lunghezza l; nel caso di angoli piccoli il periodo T è costante e vale $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, con g accelerazione di gravità.



Le vibrazioni naturali (o libere) sono le vibrazioni di un corpo che oscilla sotto l'azione della propria forza di richiamo, senza l'intervento di alcuna forza esterna. Le vibrazioni forzate sono le vibrazioni generate allorché si applica al sistema oscillante una forza esterna periodica oppure intermittente. *Risonanza* è la condizione per cui coincidendo la frequenza della forza esterna applicata con la frequenza naturale (o frequenza critica) del sistema si verifica un'ampiezza delle oscillazioni estremamente elevata, a meno che queste non vengano smorzate.



ESERCIZI

8.15 - Un pendolo è costituito da una massa appesa a un filo lungo 0,4 m e privo di massa propria. Determinare il periodo T delle sue piccole oscillazioni.

$T = 1,27$ s

8.16 - Quale lunghezza l deve avere l'asta di un pendolo semplice affinché il suo periodo sia di 1 s?

$l = 248,49$ mm

8.17 - Un orologio a pendolo "spacca il secondo" (ha cioè una frequenza $f = 1$ Hz) a Palermo dove l'accelerazione di gravità rilevata è $g_{PA} = 9,804$ m/s^2. Quale dovrà essere la correzione Δl da apportare alla lunghezza dell'asta se, conservando la frequenza di 1 Hz, si vuole trasferire l'orologio a Belluno dove l'accelerazione di gravità risulta $g_{BL} = 9,806$ m/s^2?

$\Delta l = +0,05$ mm

8.18 - Un densimetro è costituito da un cilindro graduato immerso nel liquido di cui si vuole conoscere la massa volumica, zavorrato nella sua parte inferiore in modo da mantenere sempre la posizione verticale. Il densimetro dell'esercizio ha una massa di 125 g e un diametro di 16 mm; esso galleggia ed è fermo in un liquido la cui massa volumica è 960 kg/m^3 quando viene leggermente premuto verso il basso di una generica quota z e quindi rilasciato. Scrivere l'equazione della spinta F in funzione della quota z e della sezione A del densimetro. Stabilire l'analogia tra la spinta del liquido e la reazione della molla in modo da poter ricavare la costante k della molla. Determinare infine la frequenza f del moto oscillatorio originato dall'affondamento del densimetro.

$F = -\rho g A z = -kz$; $k = 1,894$ N/m; $f = 0,62$ Hz

8.19 - Una prova di coraggio in uso presso alcune tribù primitive dell'Oceania consiste nel lanciarsi nel vuoto legati alle caviglie per mezzo di liane. Tale prova, ripresa in senso sportivo, consiste nel lanciarsi, legati per le caviglie con una fune di nylon. Calcolare il periodo T dell'oscillazione che si instaura al momento dello strappo, nota la lunghezza iniziale di 25 m della fune e l'ulteriore allungamento elastico di 15 m dovuto allo strappo.

$T = 3,36$ s

8.20 - Una macchina è montata su molle. Come cambierà la frequenza naturale del sistema se a) le molle vengono fatte più rigide e b) se più massa viene attaccata alla macchina?

a) aumenta; b) diminuisce

VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO

9. Nel caso di angoli piccoli, il periodo T del pendolo semplice varia con la massa m del pendolo e l'ampiezza dell'angolo θ.

Vero ☐ Falso ☐

10. Quando la frequenza della forza esterna f_{forzante} coincide con la frequenza naturale f_{naturale} (o frequenza propria del sistema), il sistema va in risonanza, fenomeno caratterizzato da un'ampiezza delle oscillazioni tendente all'infinito nel caso di assenza completa di smorzamento.

Vero ☐ Falso ☐