

A differenza della superficie piana orizzontale, il calcolo della spinta<sup>14.1</sup>  $F$  su una *parete verticale* deve tener conto della variazione della pressione che cresce linearmente all'aumentare della profondità secondo la legge di Stevin (14-2). Nel caso della parete a forma rettangolare di area  $A = a \cdot b$  (profonda  $a$  e larga  $b$ ) della *Figura 14.17*, si può assumere una pressione media pari alla semisomma  $(p_{\min} + p_{\max}/2)$  dei valori minimo  $p_{\min}$  e massimo  $p_{\max}$  della pressione, raggiunti rispettivamente negli estremi superiore e inferiore della parete. Ciò equivale a calcolare il valore  $p_G$  della pressione nel baricentro  $G$  del rettangolo, posto alla profondità  $h_G$  corrispondente a metà del lato  $a$  (*Figura 14.17*). La 14-7 diviene allora:

$$F = p_G A = (\rho g h_G) A \quad 14-8$$

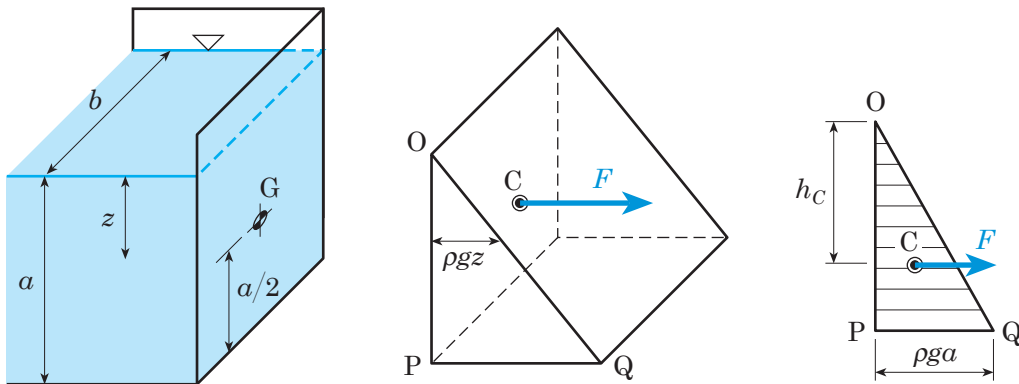


Fig. 14.17 - Spinta su una parete verticale a forma rettangolare di area  $A = ab$  (profonda  $a$  e larga  $b$ ) con baricentro  $h_G = a/2$  confinante con il pelo libero del liquido. Nel diagramma delle pressioni  $OPQ$  la pressione relativa  $p = \rho g z$  varia linearmente al crescere della profondità (14-2) passando da zero (pelo libero in  $O$ ) fino al valore massimo  $\rho g a$ . La spinta  $F$  è applicata in  $C$ , centro di spinta o centro di pressione.

Il centro di spinta  $C$ , punto di applicazione della spinta  $F$ , è spostato verso il basso rispetto al baricentro  $G$  della superficie piana su cui agisce la spinta. La spinta totale  $F$  è infatti il risultato della somma delle singole spinte elementari; ma queste aumentano all'aumentare della profondità, in quanto con la profondità aumenta la pressione: la spinta si troverà perciò più in basso del baricentro della superficie. Per ottenere la posizione del centro di spinta  $C$  occorre riferirsi al diagramma triangolare  $OPQ$  che rappresenta la distribuzione delle pressioni (*Figura 14.17*); il centro di spinta coincide con il baricentro del diagramma delle pressioni. La posizione del baricentro di un triangolo è a  $2/3$  dell'altezza  $a$  ed è qui che è applicata la spinta  $F$ :

$$h_C = \frac{2}{3} a \quad 14-9$$

14.1 - Si passa dal valore letto sull'asse  $y$  alla profondità  $h$  (*Figura 14.18-a*) facendo uso della relazione tra cateto ( $h$ ) e ipotenusa ( $y$ ) nel triangolo rettangolo di angolo  $\alpha$ :  $h/y = \sin \alpha \Rightarrow h = y \sin \alpha$ . Così la profondità  $h_G$  del baricentro di un rettangolo alto  $a = 1,8$  m e inclinato di  $\alpha = 60^\circ$  risulta:

$$h_G = y_G \sin \alpha = (a/2) \sin \alpha = (1,8 \text{ m}/2) \sin 60^\circ = 0,9 \text{ m} \times 0,866 = 0,78 \text{ m}$$

Solo nel caso della superficie orizzontale (*Paragrafo 14.7*) il centro di spinta C coincide con il baricentro G della superficie. In tutti gli altri casi il centro di spinta si trova al di sotto del baricentro della superficie piana che sopporta la pressione del liquido. Ad esempio, nel caso appena esaminato (*Figura 14.17*), la distanza tra centro di spinta C e baricentro della superficie G vale:  $h_C = h_G = \left(\frac{2}{3}\right)a - \left(\frac{1}{2}\right)a = \left(\frac{1}{6}\right)a$ .

Se la superficie piana, ad esempio il rettangolo di area  $A = ab$ , è *inclinata* di un angolo  $\alpha$  (*Figura 14.18-a*), la spinta  $F$  è ancora data dall'equazione **14-8**. In questa equazione infatti non compare l'angolo  $\alpha$  di inclinazione della superficie piana e quindi l'intensità della spinta non dipende dall'inclinazione della superficie. Occorre tuttavia fare attenzione al fatto che adesso nell'equazione **14-8** la profondità  $h_G$  del baricentro G non coincide più con la semi-altezza del rettangolo  $a/2$  (*Figure 14.18-a e 14.18-b*) come avveniva invece con la parete verticale. Così, ad esempio, per una parete rettangolare inclinata di un angolo  $\alpha = 60^\circ$  e alta  $a = 1,8$  m, la posizione del baricentro misurata lungo il lato è  $y_G = a/2 = 1,8 \text{ m}/2 = 0,9$  m, ma la profondità da introdurre nella **14-8** è  $h_G = 0,78$  m ottenuta proiettando le lunghezze  $y$  sul piano verticale.

Il diagramma delle pressioni ha sempre il caratteristico andamento linearmente crescente all'aumentare dell'altezza  $\alpha$ , già descritto nella *Figura 14.17*, con la differenza che, dovendo essere le pressioni normali alla parete, i segmenti che rappresentano le pressioni non sono più orizzontali come prima, quando la parete era verticale. La posizione del centro di spinta dovrà perciò essere valutata lungo l'asse  $y$ , traccia della superficie inclinata sul piano del disegno.

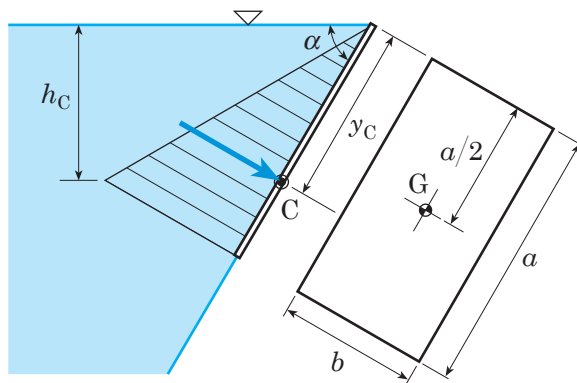


Fig. 14.18-a - Diagramma delle pressioni e determinazione della spinta per una superficie inclinata avente il bordo superiore confinante con il pelo libero.

Quando la parete, oltre a essere inclinata, è anche sommersa in modo tale che il suo bordo superiore non confini più con il pelo libero, allora il diagramma delle pressioni, dovendo iniziare in alto con una pressione diversa da zero (non c'è più la pressione atmosferica), assume la forma di un trapezio (*Figura 14.18-b*). Il centro di spinta C si trova perciò sulla parete in corrispondenza del segmento che passa per il baricentro del trapezio che indica la distribuzione delle pressioni. La *Figura 14.18-c* mostra come si può ottenere graficamente la posizione del baricentro di un trapezio.

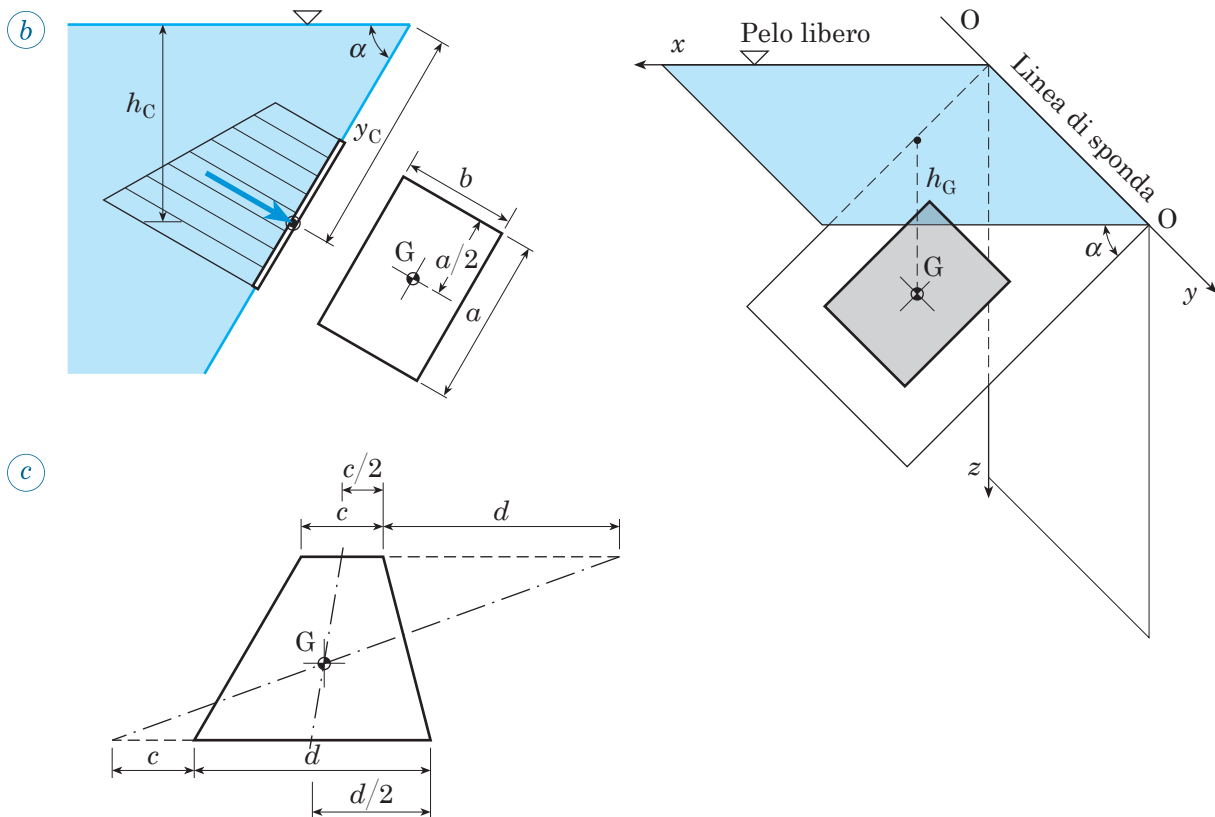


Fig. 14.18 - b) Diagramma delle pressioni e determinazione della spinta per una superficie inclinata sommersa con il bordo superiore al di sotto del pelo libero.

c) Determinazione grafica della posizione del baricentro di un trapezio: intersezione del segmento che unisce i punti medi delle due basi con la congiungente dei prolungamenti delle due basi di un segmento pari all'altra base.

### Esempio 14.6 Spinta su una parete verticale sommersa

Un'apertura rettangolare ricavata nella parete verticale di un serbatoio contenente dell'acqua è chiusa da una paratoia piatta incernierata nell'estremità superiore (*Figura 14.19*). Le dimensioni della paratoia sono: altezza  $a = 1,5$  m e larghezza  $b = 1,2$  m. Il pelo libero dell'acqua si trova 1,1 m al di sopra dell'estremità superiore della paratoia. Calcolare il momento di cerniera (asse  $MM'$ ) richiesto per mantenere la paratoia chiusa.

#### SOLUZIONE

Il momento richiesto per mantenere la paratoia chiusa è uguale e opposto al momento della spinta  $F$  dovuta all'acqua e applicata al centro di spinta  $C$ ; tale momento è  $F \times CM$  (*Figura 14.19*). La spinta  $F$  si calcola con l'equazione 14-8:

$$F = \rho g h_G A$$

L'area  $A$  della paratoia (si tratta del rettangolo alto  $a$  e largo  $b$ ) è:

$$A = ab = 1,5 \text{ m} \times 1,2 \text{ m} = 1,8 \text{ m}^2$$

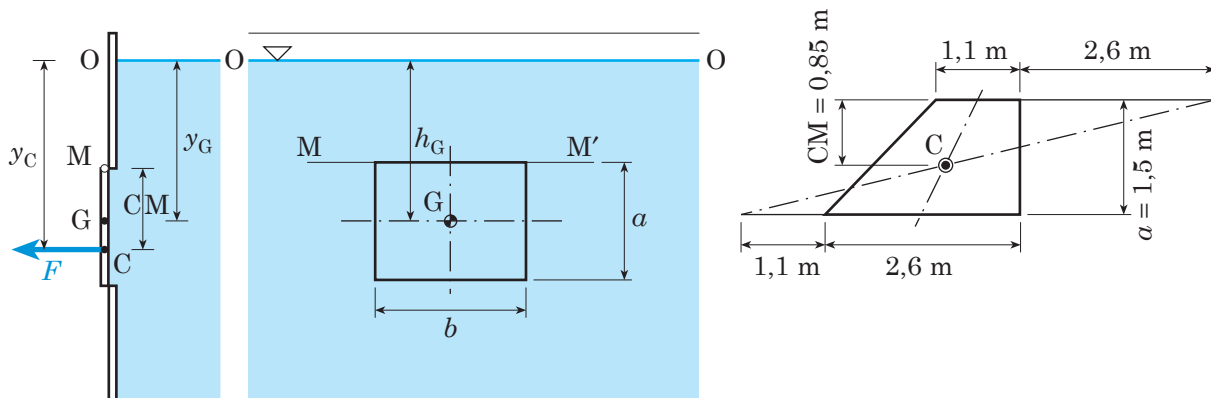


Fig. 14.19 - Paratoia rettangolare di un canale: determinazione grafica del baricentro del trapezio delle pressioni.

Tenendo presente che  $(1/2)a$  è la posizione del baricentro del rettangolo, la profondità del baricentro  $h_G$  della paratoia è (Figura 14.19):

$$h_G = OM + \frac{1}{2}a = 1,1 \text{ m} + \frac{1}{2}1,5 \text{ m} = 1,1 \text{ m} + 0,75 \text{ m} = 1,85 \text{ m}$$

Sostituendo i valori di  $A$  e di  $h_G$  nell'equazione 14-8, si ottiene la spinta  $F$ :

$$F = \rho g h_G A = 1000 \text{ kg/m}^3 \times 9,81 \text{ m/s}^2 \times 1,85 \text{ m} \times 1,8 \text{ m}^2 = 32.667 \text{ N} = 32,67 \text{ kN}$$

La posizione del centro di spinta  $CM$  viene determinata graficamente, trovando la posizione del baricentro del trapezio delle pressioni con il metodo illustrato nella Figura 14.18-c e riportato nella Figura 14.19; risulta così

$$CM = 0,85 \text{ m}$$

Il momento rispetto all'asse di cerniera è infine dato da

$$F \times CM = 32,67 \text{ kN} \times 0,85 \text{ m} = 27,77 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

### Esempio 14.7 Spinta in un recipiente contenente aria e acqua

Un'autoclave (Figura 14.20-a) a pianta rettangolare e con pareti verticali è profonda 2 m e contiene acqua fino a una profondità di 1,4 m. Nello spazio libero al di sopra dell'acqua viene pompata dell'aria, finché quest'ultima raggiunge una pressione pari a 40 kPa. L'ampiezza di una delle pareti dell'autoclave è  $b = 4$  m: determinare la spinta  $F$  su questa parete e l'altezza del centro di spinta  $z_C$  al di sopra della base.

#### SOLUZIONE

La pressione dell'aria  $p$  si esercita uniformemente sull'intera parete verticale di altezza  $a = 2$  m e ampiezza  $b = 4$  m. Può essere quindi rappresentata dal diagramma delle pressioni ABCD (Figura 14.20-b), la cui area rappresenta la forza esercitata dall'aria per unità di ampiezza della parete verticale. La spinta dovuta all'aria  $F_{\text{aria}}$  è quindi data da (14-7):

$$F_{\text{aria}} = pA = p(ab) = 40 \text{ kPa} \times 2 \text{ m} \times 4 \text{ m} = 320 \text{ kN}$$

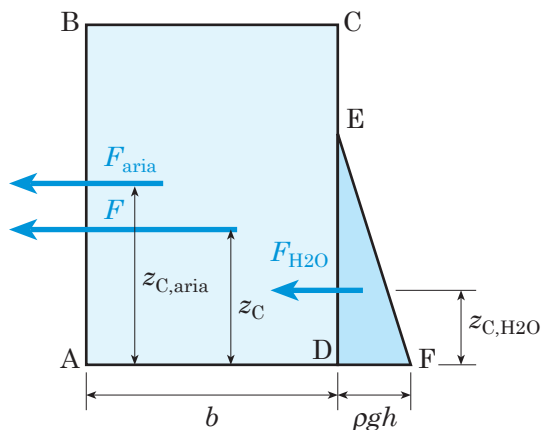
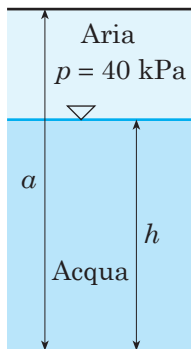


Fig. 14.20-a - Schema dell'autoclave dell'Esempio 14.7.

Fig. 14.20-b - Diagramma delle pressioni dell'Esempio 14.7.

Essendo inoltre la parete rettangolare e la pressione uniforme, la spinta  $F_{\text{aria}}$  è applicata a metà altezza della parete ( $z_{\text{C,aria}} = 1 \text{ m}$  al di sopra della base).

La pressione esercitata dall'acqua parte invece dal valore zero, in corrispondenza del pelo libero (punto E del diagramma di *Figura 14.20-b*), per arrivare al valore  $\rho g h$  sul fondo dell'autoclave (punto F del diagramma di *Figura 14.20-b*). L'area del diagramma triangolare EDF rappresenta la spinta esercitata dall'acqua per unità di ampiezza della parete. La spinta dell'acqua  $F_{\text{H}_2\text{O}}$  vale quindi (equazione 14-8):

$$F_{\text{H}_2\text{O}} = \rho g h_G A$$

$$h_G = \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} 1,4 \text{ m} = 0,7 \text{ m}$$

$$A = ab = 2 \text{ m} \times 4 \text{ m} = 8 \text{ m}^2$$

$$F_{\text{H}_2\text{O}} = 1000 \text{ kg/m}^3 \times 9,81 \text{ m/s} \times 0,7 \text{ m} \times 8 \text{ m}^2 = 54.936 \text{ N} = 54,9 \text{ kN}$$

Essendo la distribuzione delle pressioni triangolare, l'altezza del centro di spinta dalla base è  $z_{\text{C,H}_2\text{O}} = (1/3)h = 0,467 \text{ m}$ . È qui infatti che si trova il baricentro del diagramma triangolare delle pressioni (*Figura 14.20-b*). L'altezza  $z_C$  equivale alla profondità  $h_C$  data dalla 14-9, con la differenza che mentre qui  $z_C$  viene calcolato a partire dalla base, in quel caso  $h_C$  veniva calcolata a partire dal pelo libero, e quindi valeva  $2/3 h$ . La spinta totale  $F$  è determinata dalla somma delle due spinte, quella dell'aria e quella dell'acqua, nel modo seguente:

$$F = F_{\text{aria}} + F_{\text{H}_2\text{O}} = 320 \text{ kN} + 54,9 \text{ kN} = 374,9 \text{ kN}$$

Per l'equilibrio, il momento della risultante deve essere uguale alla risultante dei momenti; nel nostro caso uguagliamo il momento della spinta totale  $F$ , prodotto di  $F$  per la distanza  $z_C$  dalla base, alla somma dei momenti delle singole spinte, rispettivamente aria e acqua, valutati sempre rispetto alla base:

$$F z_C = F_{\text{aria}} z_{\text{C,aria}} + F_{\text{H}_2\text{O}} z_{\text{C,H}_2\text{O}}$$

Risolviendo poi rispetto a  $z_C$ , si trova l'altezza dalla base a cui è applicata la spinta:

$$z_C = \frac{F_{\text{aria}} z_{C,\text{aria}} + F_{\text{H}_2\text{O}} z_{C,\text{H}_2\text{O}}}{F} = \frac{320 \text{ kN} \times 1 \text{ m} + 54,9 \text{ kN} \times 0,467 \text{ m}}{374,9 \text{ kN}} = 0,92 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$

## 14.9 Spinta su una superficie curva

Se la superficie è *curva*, le singole spinte, che agiscono sulle diverse parti che compongono l'area totale della superficie, non sono tra loro parallele e devono quindi essere composte vettorialmente. Poiché l'operazione di calcolo e di composizione delle singole spinte è piuttosto complessa, si preferisce calcolare la componente orizzontale  $F_o$  e la componente verticale  $F_v$  della spinta totale risultante  $F$  e dalle componenti risalire alla direzione di  $F$  (Figura 14.21):

$$F = \sqrt{F_o^2 + F_v^2} \quad \mathbf{14-10}$$

Nel caso particolare di una superficie cilindrica, tutte le singole spinte sulle aree elementari sono dirette secondo il raggio e quindi passano per il centro di curvatura  $O$  della superficie (Figura 14.22); la spinta risultante  $F$  deve quindi passare anch'essa per il centro di curvatura  $O$ .

Tralasciando il calcolo generale della spinta su una superficie curva<sup>14.2</sup>, in questo paragrafo verrà illustrata la determinazione della spinta idrostatica esercitata sulle pareti di un tubo a gomito di volume  $V$  in cui si trova un liquido di massa volumica  $\rho$  alla pressione  $p$  (Figura 14.23).

Se il gomito si trova su un piano orizzontale il peso  $P = \rho g V$  del liquido applicato al baricentro  $G$  agisce in una direzione perpendicolare al piano del disegno e quindi non influenza le componenti orizzontale e verticale della spinta. Se poi l'area delle due sezioni è uguale ( $A = A_{\text{sup}} = A_{\text{inf}}$ ), anche le componenti del tubo in cui si trova il liquido alla pressione  $p$  sono uguali e valgono (14-6):

$$F_o = F_v = pA \quad \ll \text{gomito orizzontale} \gg \quad \mathbf{14-11}$$

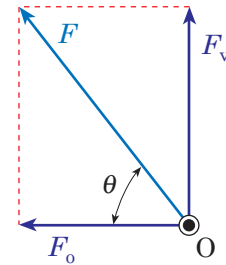


Fig. 14.21 - Somma vettoriale delle componenti orizzontale  $F_o$  e verticale  $F_v$  per ottenere la spinta totale  $F$  applicata al centro di spinta  $O$ .

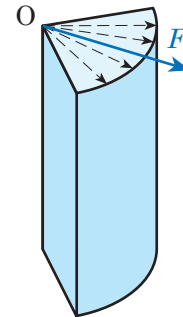
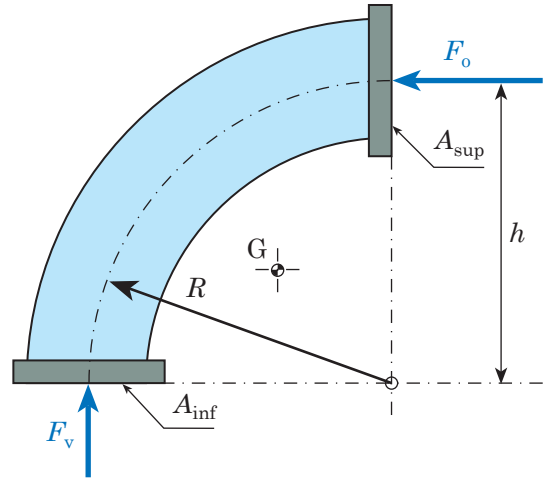


Fig. 14.22 - Spinta su una superficie cilindrica.

14.2 - Maggiori dettagli sul calcolo della spinta si trovano in *Macchine Idrauliche* di G. Cornetti e F. Millo.

Fig. 14.23 - Gomito a 90° di raggio  $R$  contenente un liquido di massa volumica  $\rho$ ;  $A_{sup}$  e  $A_{inf}$  sono le sezioni superiore e inferiore del gomito. Nel caso di  $A = A_{sup} = A_{inf}$ , il volume  $V$  è dato dal prodotto di  $1/4$  della lunghezza della circonferenza ( $2\pi R$ ) per  $A$ .



Se il gomito si trova invece su un piano verticale, occorre tener conto nel calcolo della componente verticale  $F_v$  anche della pressione  $\rho gh$  dovuta al liquido contenuto nel gomito (Figura 14.23). Sempre nell'ipotesi che l'area delle due sezioni sia uguale ( $A = A_{sup} = A_{inf}$ ), risulta:

$$F_o = pA \quad F_v = (p + \rho gh)A \quad \ll \text{gomito verticale} \gg \quad 14-12$$

Alla risultante della spinta  $F$ , ottenuta come somma dei due vettori  $F_o$  ed  $F_v$  (la loro intensità è data dalla 14-10), bisognerà poi aggiungere, sempre vettorialmente, il peso del liquido che si trova nel gomito di raggio  $R$  lungo  $2\pi R/4$ :

$$P = \rho gV = \rho g \left( \frac{2\pi R}{4} A \right) = \frac{\pi R}{2} A \quad 14-12'$$

## 14.10 Spinta su corpi immersi

Gli stessi principi utilizzati per calcolare la spinta idrostatica su superfici possono essere applicati alla forza esercitata dalla pressione di un fluido in quiete su un corpo completamente sommerso oppure su un corpo galleggiante. I risultati sono i *due principi della spinta di galleggiamento (buoyancy)* scoperti da *Archimede* nel terzo secolo avanti Cristo:

1. Quando un corpo pesante è immerso in un fluido, esso subisce una spinta verticale diretta verso l'alto uguale al peso del fluido spostato.
2. Quando un corpo galleggia in un fluido, esso sposta la quantità di fluido sufficiente per bilanciare esattamente il suo peso.

---

Consideriamo il corpo sommerso della Figura 14.24. La spinta orizzontale risultante delle pressioni che si esercitano sul corpo è uguale a zero: le spinte orizzontali  $F_o$ , che agiscono sull'area proiettata di ciascuno dei due lati del corpo sul piano verticale  $VV$ , sono infatti uguali in intensità e direzione, ma opposte come verso. Sulle due estremità di un prisma verticale di sezione trasversale  $\delta A$  agiscono le due forze verticali  $p_1\delta A$  e  $p_2\delta A$ . La differenza tra le forze esercitate da queste due pressioni, una

diretta verso l'alto e l'altra diretta verso il basso, è la spinta  $\delta F$ , che si esercita sul prisma verticale di altezza  $y$  e di volume  $\delta V = y\delta A$ :

$$\delta F = p_2\delta A - p_1\delta A = \rho g(y+z)\delta A - \rho g z\delta A = \rho g\delta V$$

Ripetendo questo calcolo per tutti i singoli prismetti di volume  $\delta V$  in cui si può immaginare scomposto il corpo ed effettuandone la somma si ottiene la spinta di galleggiamento  $F = \rho g V$  esercitata sull'intero corpo sommerso di volume totale  $V$ .

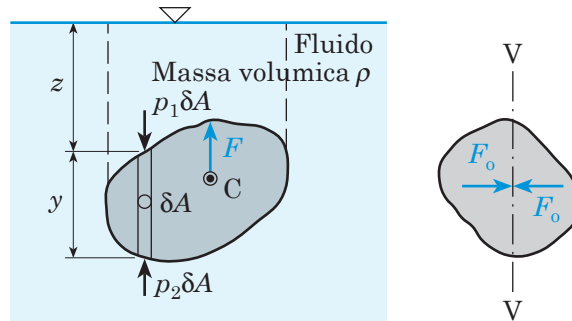


Fig. 14.24 - Spinta su un corpo sommerso.

La spinta di galleggiamento  $F$  esercitata su un corpo è il peso del fluido, di massa volumica  $\rho$ , spostato dal corpo sommerso di volume  $V$ :

$$F = \rho g V \quad 14-13$$

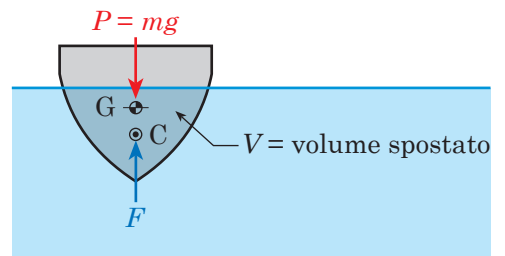
La spinta  $F$  agisce verticalmente verso l'alto attraverso un centro di galleggiamento o di carena  $C$  che coincide con il baricentro del volume spostato. Se si confronta il peso  $P = \rho_{\text{corpo}} g V$  del corpo sommerso con la spinta  $F = \rho g V$  esercitata dal fluido di massa volumica  $\rho$ , si possono verificare tre diverse situazioni:

- se  $\rho_{\text{corpo}}$  è uguale a  $\rho$ , il corpo rimane in equilibrio alla profondità in cui si trova;
- se  $\rho_{\text{corpo}}$  è maggiore di  $\rho$ , il corpo scende più in basso;
- se  $\rho_{\text{corpo}}$  è inferiore a  $\rho$ , il corpo viene spinto verso l'alto da una forza ascendente, differenza tra la spinta  $F$  e il peso del corpo  $P$ .

Nell'ultimo caso, tipico delle imbarcazioni, si raggiunge una condizione di equilibrio quando il peso  $P = mg$  del corpo di massa  $m$  è uguale alla spinta  $F$  dovuta al fluido spostato dalla parte immersa  $V$  dell'imbarcazione (Figura 14.25):

$$F = \rho g V = P \quad 14-14$$

Fig. 14.25 - Quando un corpo galleggia (*floating body*) in equilibrio verticale in un liquido, le forze presenti sono la spinta  $F$  verso l'alto applicata nel centro di carena (*center of buoyancy*)  $C$  e il peso del corpo  $P$  che agisce sul suo baricentro (*center of gravity*)  $G$ . Per l'equilibrio  $F$  e  $P$  devono essere uguali e agire lungo la stessa retta.



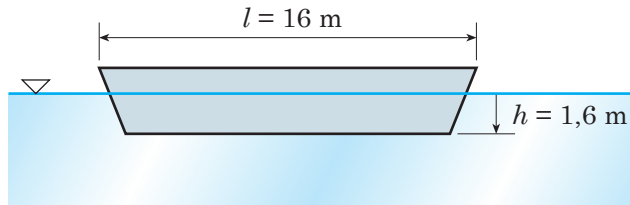


### Esempio 14.8 Spinta su un pontone

Un pontone rettangolare ha una larghezza  $b = 8$  m, una lunghezza  $l = 16$  m e un pescaggio (profondità di immersione)  $h = 1,6$  m in acqua dolce (massa volumica  $1000 \text{ kg/m}^3$ ).

Determinare:

- il peso del pontone  $P$ ;
- la profondità di immersione  $h_m$  che avrebbe in mare (massa volumica  $1025 \text{ kg/m}^3$ );
- il carico (in kN) che può essere sopportato dal pontone in acqua dolce qualora il pescaggio massimo ammissibile sia pari a 2 m.



### SOLUZIONE

Il peso  $P$  del pontone, per la 14-14, è uguale al peso del liquido spostato. Il volume  $V$  di liquido spostato è dato da

$$V = blh$$

- dove  $b = 8$  m (larghezza del pontone);  
 $l = 16$  m (lunghezza del pontone);  
 $h = 1,6$  m (pescaggio o profondità di immersione).

Il peso  $P$  del pontone risulta quindi da:

$$P = \rho g V = \rho g (blh) \quad 14-14'$$

- a) È nota la profondità di immersione in acqua dolce  $h = 1,6$  m e la massa volumica  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ . Possiamo, con la 14-14', ricavare il peso  $P$  del pontone:

$$P = \rho g blh = 1000 \text{ kg/m}^3 \times 9,81 \text{ m/s}^2 \times 8 \text{ m} \times 16 \text{ m} \times 1,6 \text{ m} = 2009 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$

- b) In mare la massa volumica vale  $\rho_m = 1025 \text{ kg/m}^3$ . La profondità di immersione in mare  $h_m$  si ricava risolvendo la 14-14', rispetto a  $h$ , in quanto ormai è noto il peso del pontone:

$$h_m = \frac{P}{\rho_m g bl} = \frac{2.009.000 \text{ N}}{1025 \text{ kg/m}^3 \times 9,81 \text{ m/s}^2 \times 8 \text{ m} \times 16 \text{ m}} = 1,56 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$

- c) Se il pescaggio massimo ammissibile  $h_a$  è pari a 2 m in acqua dolce ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ), allora la spinta totale  $F$ , per la 14-14', è data da:

$$F = \rho g (blh_a) = 1000 \text{ kg/m}^3 \times 9,81 \text{ m/s}^2 \times 8 \text{ m} \times 16 \text{ m} \times 2 \text{ m} = 2511 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$

In queste condizioni il carico che può essere sopportato dal pontone è uguale alla spinta  $F$  meno il peso  $P$  del pontone, che avevamo calcolato in a):

$$2511 \text{ kN} - 2009 \text{ kN} = 502 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$

## 14.11 Stabilità di corpi nei fluidi

I criteri generali che presidono all'equilibrio di un corpo sono esemplificati dalla *Figura 14.26*, dove  $F$  indica una forza che viene applicata al cono per saggiare in quale equilibrio si trovi.

La stabilità di un corpo sommerso o di un corpo galleggiante è determinata dalla posizione relativa del suo baricentro e del centro di carena. Si dice che un corpo sommerso oppure un corpo galleggiante è *stabile* se tende a ritornare nella sua posizione originale quando venga spostato da questa facendolo ruotare di un piccolo angolo.

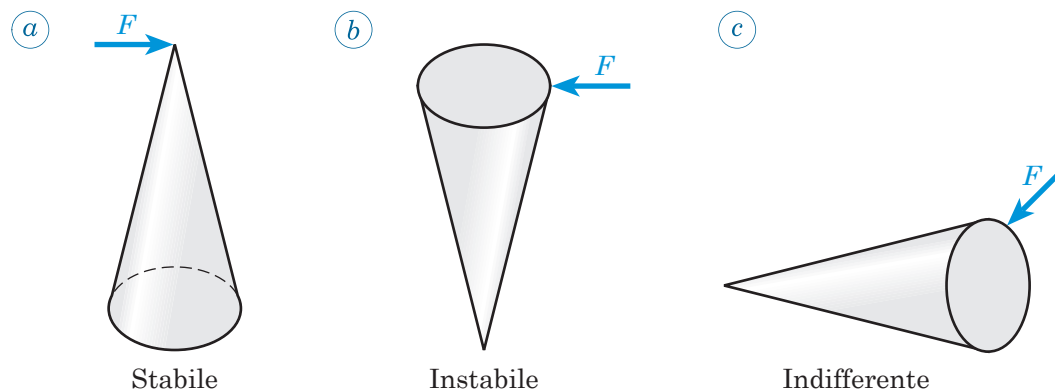


Fig. 14.26 - I tre diversi tipi di equilibrio:

- Equilibrio stabile: un piccolo spostamento dalla posizione di equilibrio genera una forza che produce un momento raddrizzante, tendente a riportare il corpo nella sua posizione di equilibrio.
- Equilibrio instabile: un piccolo spostamento produce un momento che fa rovesciare il corpo, facendolo allontanare ulteriormente dalla posizione di equilibrio instabile.
- Equilibrio indifferente: il corpo rimane fermo in qualsiasi posizione venga spostato.

Quando il corpo è completamente immerso in un fluido, la posizione del suo baricentro e quella del suo centro di carena rimangono fisse. In generale, un corpo sommerso, come ad esempio un pallone aerostatico (si tratta di un corpo totalmente immerso nell'aria) oppure un sommergibile (*Figura 14.27*), viene considerato stabile se il suo baricentro  $G$  si situa al di sotto del centro di carena  $C$ .

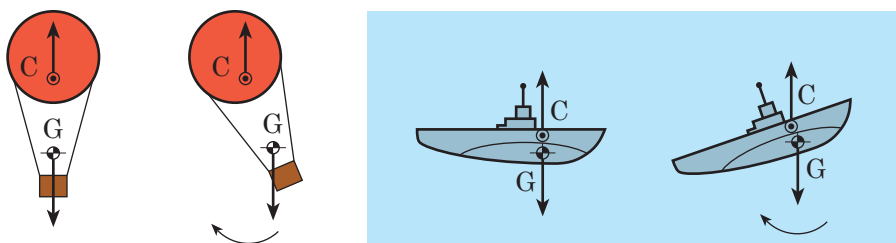
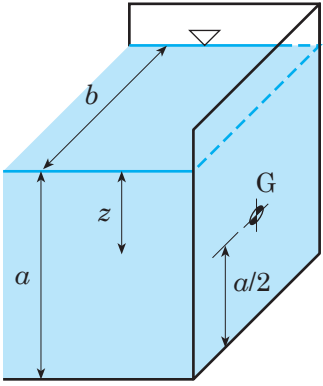
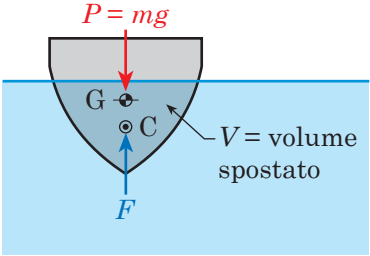


Fig. 14.27 - Stabilità di corpi sommersi.

Così, se il corpo sommerso viene inclinato leggermente, nasce una coppia raddrizzante che tende a riportarlo nella sua posizione originale. Se al contrario il centro di carena si trovasse al di sotto del baricentro, la coppia prodotta da un piccolo spostamento angolare del corpo sommerso tenderebbe a far ruotare il corpo lontano dalla sua posizione originale. Se i due punti – centro di gravità e centro di carena – coincidono, il corpo sommerso si trova sempre in *equilibrio indifferente* per qualsiasi posizione che esso possa venire ad assumere.

## SINTESI

<p>La <i>spinta idrostatica</i> <math>F</math> su una parete <i>verticale</i> o <i>inclinata</i> è il prodotto della pressione <math>p_G</math> nel baricentro <math>G</math> della parete per la sua area <math>A</math>. La spinta è applicata nel centro di spinta <math>C</math> posto più in basso di <math>G</math>.</p>		$F = p_G A = (\rho g h_G) A \quad \text{14-8}$ <p> <math>F</math> = forza [N]  <math>p_G</math> = pressione nel baricentro [Pa]  <math>A</math> = area [m<sup>2</sup>]  <math>\rho</math> = massa volumica [kg/m<sup>3</sup>]  <math>g</math> = accelerazione di gravità (9,81 m/s<sup>2</sup>)  <math>h_G</math> = profondità del baricentro [m]         </p>
<p>Il peso <math>P = mg</math> del corpo di massa <math>m</math> applicata nel suo baricentro <math>G</math> è uguale alla spinta <math>F</math> applicata nel centro di carena <math>C</math> dovuta al fluido spostato dalla parte immersa <math>V</math> del corpo.</p>		$F = \rho g V = P \quad \text{14-14}$ <p> <math>F</math> = forza [N]  <math>\rho</math> = massa volumica [kg/m<sup>3</sup>]  <math>g</math> = accelerazione di gravità (9,81 m/s<sup>2</sup>)  <math>V</math> = volume del fluido spostato dal corpo [m<sup>3</sup>]  <math>P</math> = peso del corpo [N]         </p>

## ESERCIZI

**14.12** - La parete di un serbatoio rettangolare, riempito completamente di metanolo (massa volumica  $\rho = 790 \text{ kg/m}^3$ ), è profonda  $a = 2,2 \text{ m}$  e larga  $b = 1,6 \text{ m}$ . Determinare la spinta  $F$  e la profondità del centro di spinta  $h_C$ .

$$F = 30 \text{ kN}; h_C = 1,47 \text{ m}$$

**14.13** - Determinare spinta  $F$  e profondità del centro di spinta  $h_C$  dalla sommità di una paratoia verticale, profonda  $a = 2,0 \text{ m}$  e larga  $b = 1,6 \text{ m}$ , che è immersa in acqua, di massa volumica  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , e che confina superiormente con il pelo libero.

$$F = 31,4 \text{ kN}; h_C = 1,33 \text{ m}$$

**14.14** - Determinare spinta  $F$  e profondità del centro di spinta  $h_C$  dalla sommità di una paratoia verticale, profonda  $a = 2,0 \text{ m}$  e larga  $b = 1,6 \text{ m}$ , che è immersa in acqua, di massa volumica  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , a una distanza dal pelo libero OM nei due casi a) di  $0,4 \text{ m}$  e b) di  $20 \text{ m}$ . Seguire la procedura illustrata nell'*Esempio 14.6*.

$$F = 43,9 \text{ kN e } h_C = 1,64 \text{ m per OM} = 0,4 \text{ m}; \\ F = 659,2 \text{ kN e } h_C = 21,01 \text{ m per OM} = 20,0 \text{ m}$$

**14.15** - Calcolare il peso  $P$  di una nave che sposta in mare (massa volumica  $\rho_{\text{mare}} = 1025 \text{ kg/m}^3$ ) il volume  $V_{\text{mare}} = 120 \text{ m}^3$ . Determinarne poi la massa  $m$ . Calcolare infine il volume di acqua dolce  $V_{\text{acquadolce}}$  (massa volumica  $\rho_{\text{acquadolce}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) che sarebbe spostato dalla nave se si trovasse in un lago.

$$P = 1206,6 \text{ kN}; m = 122.996,94 \text{ kg}; \\ V_{\text{acquadolce}} = 123,0 \text{ m}^3$$

**14.16** - In un tubo curvo con gomito a  $90^\circ$ , situato in un piano orizzontale, si trova del

liquido avente una pressione  $p = 2 \text{ MPa}$  (*Figura 14.23*). L'area delle due sezioni estreme del tubo vale  $A = A_{\text{sup}} = A_{\text{inf}} = 2000 \text{ mm}^2$ . Calcolare l'intensità delle due componenti orizzontale e verticale  $F_o$  ed  $F_v$  della spinta nonché la loro risultante  $F$ .

$$F_o = F_v = 4,24 \text{ kN}; F = 6 \text{ kN}$$

**14.17** - Calcolare la spinta  $F$  su una superficie rettangolare inclinata (profonda  $a = 1,8 \text{ m}$  e larga  $b = 1,2 \text{ m}$ ) confinante con il pelo libero dell'acqua (massa volumica  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) nel caso a) in cui il baricentro si trova alla profondità  $h_G = 0,78 \text{ m}$ . Rifare il calcolo per il caso b) in cui la superficie è immersa e il baricentro si trova alla profondità  $h_G = 2,86 \text{ m}$ .

$$\text{a) } F = 16,5 \text{ kN}; \text{ b) } F = 60,6 \text{ kN}$$

**14.18** - Una scatola cubica a tenuta stagna di lato  $a = 300 \text{ mm}$  ha le pareti in lamiera di ferro ( $\rho_{\text{ferro}} = 7800 \text{ kg/m}^3$ ) di spessore  $s = 10 \text{ mm}$ . Dopo aver calcolato il volume della scatola  $V_{\text{scatola}}$ , quello del ferro  $V_{\text{ferro}}$  e il peso  $P$  della scatola, valutare se la spinta  $F$  calcolata per la scatola sommersa è maggiore di  $P$  in modo che la scatola possa galleggiare.

$$V_{\text{scatola}} = 0,027 \text{ m}^3; V_{\text{ferro}} = 2,6 \times 10^{-3} \text{ m}^3; \\ P = 199,8 \text{ N}; F = 264,9 \text{ N}$$

**14.19** - Un canale, dove scorre dell'acqua profonda  $a = 1,4 \text{ m}$ , è chiuso da una paratoia rettangolare larga  $b = 3 \text{ m}$  e alta  $c = 2 \text{ m}$ . A valle della paratoia non vi è acqua. Determinare la spinta  $F$  sulla paratoia e la posizione del centro di spinta  $h_C$  rispetto al pelo libero.

$$F = 28,8 \text{ kN}; h_C = 0,93 \text{ m}$$

**14.20** - Le due flange della *Figura 14.30* sono tenute insieme da tre bulloni. Il tubo ha una sezione circolare di diametro interno  $d = 100$  mm. Sapendo che il tubo è in pressione con  $p = 6,2$  MPa, calcolare la forza  $F$  totale e quella  $F_{\text{bullone}}$  esercitata su ciascun bullone.

$$F = 48,67 \text{ kN}; F_{\text{bullone}} = 16,2 \text{ kN}$$

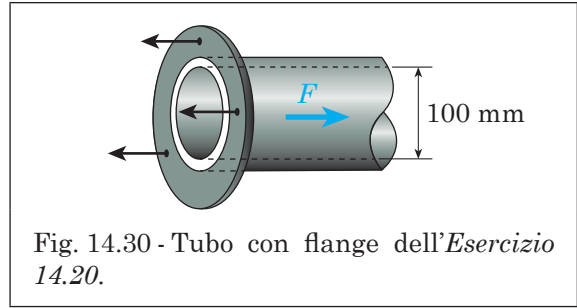


Fig. 14.30 - Tubo con flange dell'*Esercizio 14.20*.

## VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO

13. Il punto di applicazione della spinta su una parete verticale sommersa a forma rettangolare coincide con il baricentro del rettangolo. Vero  Falso
14. La spinta  $F$  di un liquido di massa volumica  $\rho$  su una superficie piana sommersa inclinata è funzione:  
a) della profondità  $h_G$  del baricentro e dell'area  $A$  della superficie;  
b) soltanto dell'angolo  $\alpha$  di cui è inclinata la superficie.
15. Il centro di spinta della pressione idrostatica che si esercita su una superficie piana orizzontale coincide con il baricentro della superficie. Vero  Falso
16. Del liquido in quiete provoca una spinta sulla parete verticale a forma rettangolare confinante in alto con il pelo libero. Il rettangolo è alto  $\alpha$ . Calcolare la differenza  $h_C - h_G$  tra l'affondamento del centro di spinta  $C$  e l'affondamento del baricentro  $G$  del rettangolo.
17. La spinta  $F$  che determina il galleggiamento di un'imbarcazione, è generata dal fluido spostato dalla parte immersa dell'imbarcazione. Vero  Falso
18. I due principi della spinta di galleggiamento scoperti da Archimede sono:  
1. ....  
.....  
2. ....  
.....
19. Una mongolfiera oppure un sommergibile sono considerati stabili se il baricentro è situato ..... del centro di carena.
20. Se la posizione del centro di carena coincide con il baricentro, il corpo viene considerato in equilibrio:  
a) stabile  
b) instabile  
c) indifferente