

## 23.1 Linea elastica

Sotto l'azione del carico, una trave (ad esempio, la trave appoggiata della *Figura 23.1*) si flette deformandosi elasticamente secondo una curva che prende il nome di **linea elastica** (*elastic curve*). A seguito di questa deformazione elastica dell'asse geometrico della trave, i diversi punti della trave subiscono spostamenti più o meno sensibili rispetto alla posizione originale orizzontale che la trave aveva allorché il carico era assente: l'entità dello spostamento in ciascun punto della trave viene individuata dall'inflexione (*deflection*) della linea elastica, chiamata anche, più intuitivamente, freccia dell'inflexione, abbreviata spesso in freccia. Nel caso del carico distribuito uniformemente e in modo simmetrico della *Figura 23.1*, si sono indicate oltre alla freccia massima  $y_{\max}$  in mezzeria e la freccia  $y$  in un punto generico della trave anche l'inclinazione (*slope*)  $\theta$  sull'appoggio A. L'Appendice B.2 riporta le espressioni della freccia generica  $y$  lungo la trave e in alcuni punti caratteristici; il segno è preso positivo quando la freccia è orientata nel verso positivo dell'asse  $y$ .

Nelle applicazioni molto spesso vengono richieste determinazioni accurate delle inflessioni subite dalla trave in quanto:

1. gli elementi delle macchine devono essere sufficientemente rigidi per evitare la perdita dell'allineamento e per mantenere le dimensioni corrette sotto carico;
2. è essenziale disporre di informazioni sulle caratteristiche di deformazione dei membri nel progetto di organi di macchina soggetti a vibrazioni e di strutture destinate ad applicazioni aeronautiche e spaziali.

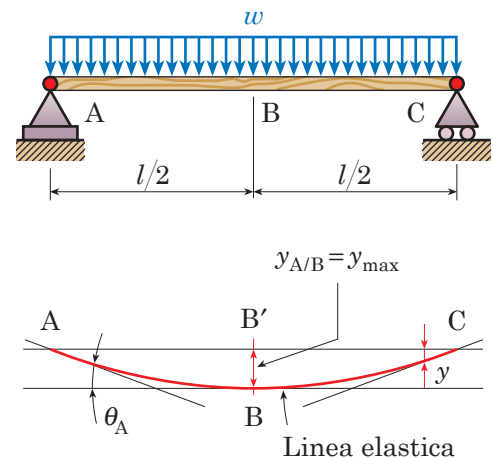


Fig. 23.1 - Carico uniformemente distribuito  $w$  [kN/m] su una trave appoggiata con evidenziata sulla linea elastica l'inclinazione  $\theta$  in A, la freccia massima  $y_{A/B} = y_{\max}$  in mezzeria e la freccia  $y$  in un punto generico della trave.

Nel progetto degli elementi delle macchine sono stati posti dei limiti agli sforzi per evitare che, sotto severe condizioni di carico in esercizio, si verifichi il cedimento dell'elemento. Nel progetto di alcune strutture o dei collegamenti tra gli elementi della macchina, tuttavia, il livello raggiunto dallo sforzo massimo potrebbe non rappresentare il limite più severo dell'elemento considerato; la limitazione infatti posta al massimo valore dell'inflexione può risultare la condizione di gran lunga più severa nel progetto di quel dato elemento.

Ancora una volta il *principio di sovrapposizione* (*Paragrafo 20.1*), risulta estremamente utile per determinare, in presenza di condizioni di carico anche complesse, lo spostamento subito dall'asse geometrico della trave. Tale principio afferma che lo sforzo risultante oppure

la deformazione in un sistema soggetto a forze diverse è la somma algebrica degli effetti generati da queste stesse forze quando ciascuna forza viene applicata separatamente. Se perciò vi sono condizioni diverse di carico, ad esempio dei carichi concentrati e un carico uniforme (Figura 23.2), lo sforzo totale e l'inflessione totale in un dato punto della trave si ottengono sommando insieme i vari sforzi o deformazioni nel punto considerato generati da ciascun carico preso singolarmente. Se lo sforzo oppure l'inflessione provocato da uno dei carichi è negativo, allora questo va sottratto invece di essere sommato. Si potrà allora ricavare l'inflessione, in un dato punto della trave, prodotta da un caso di carico apparentemente complesso come somma algebrica delle inflessioni separatamente prodotte da condizioni di carico più semplici.

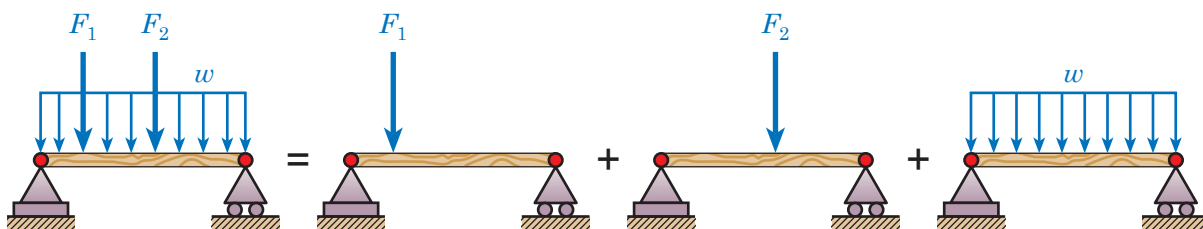


Fig. 23.2 - Risoluzione di una situazione di carico apparentemente complesso come somma di tre casi semplici relativi rispettivamente al primo carico concentrato  $F_1$ , al secondo carico concentrato  $F_2$  e al carico uniformemente distribuito  $w$ .

La trattazione generale dell'inflessione di una trave viene svolta con equazioni differenziali. Esiste tuttavia anche un metodo più semplice – metodo del momento-area (*moment-area method*) basato sui teoremi di Mohr – che fornisce un colpo d'occhio immediato sulle deformazioni della trave determinando inflessione e inclinazione soltanto in alcuni punti della trave.

Nell'ipotesi che:

- A e B siano due punti della linea elastica di una trave (si prenda, ad esempio, la trave della Figura 23.1),
  - la rigidezza flessionale  $EI$  della trave sia costante,
- e che per ulteriore semplificazione:
- B sia un punto di inclinazione nulla (la tangente in B alla linea elastica è cioè orizzontale come nella Figura 23.1);

allora per i due teoremi di Mohr si ha:

1. L'inclinazione  $\theta_A$  [rad] in A è uguale al prodotto del reciproco della rigidezza flessionale ( $1/EI$ ) per l'area  $A_{MAB}$  del diagramma del momento flettente  $M_{AB}$  tra A e B:

$$\theta_A = \frac{1}{EI} A_{MAB} \quad 23-1$$

2. L'inflessione  $y_{A/B}$  [mm] di A relativa a B è uguale al prodotto di  $1/EI$  per l'area  $A_{MAB}$  del diagramma del momento flettente  $M_{AB}$  (tra A e B) e per la distanza orizzontale  $x$  del baricentro di questa area da A:

$$y_{A/B} = \frac{1}{EI} A_{MAB} x \quad 23-2$$

Nella risoluzione di queste equazioni non viene precisato il valore positivo oppure negativo dell'inclinazione  $\theta_A$  e dell'inflessione  $y_{A/B}$ . Qualora si voglia definirne il segno, essendo nella **23-2** le grandezze  $E$ ,  $I$  e  $x$  intrinsecamente positive, l'inflessione  $y$  come pure l'inclinazione  $\theta$  della linea elastica dovranno tener conto di un tracciato qualitativo della linea elastica fatta in base ai vincoli e al diagramma del momento flettente  $M$  (Figura 23.3).

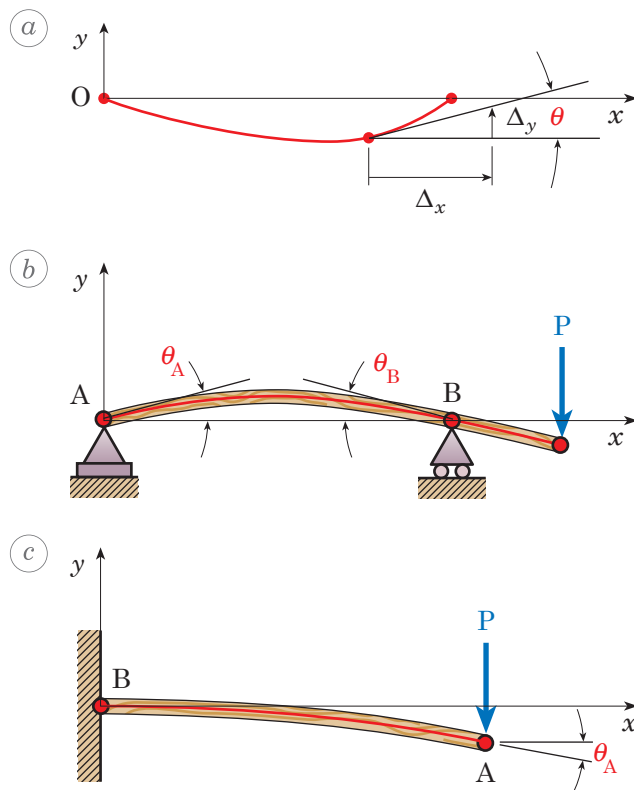


Fig. 23.3 - Segno dell'inclinazione  $\theta$ , angolo che la tangente alla linea elastica forma con l'orizzontale.

a) L'inclinazione della linea elastica  $\theta = \Delta y / \Delta x$  è positiva ( $\theta > 0$ ) se la variazione di  $y$  è positiva ( $\Delta y > 0$ ) nel verso delle  $x$  crescenti.

b) In una trave a sbalzo  $\theta_A > 0$  e  $\theta_B < 0$  perché, in A,  $y$  è crescente ( $\Delta y > 0$ ) mentre, in B,  $y$  è decrescente ( $\Delta y < 0$ ) all'aumentare di  $x$ .

c) In una mensola, nell'incastro B sia la freccia  $y_B$  che l'inclinazione  $\theta_B$  sono nulle ( $y_B = 0$ ,  $\theta_B = 0$ ), mentre, all'estremità libera A, l'inclinazione  $\theta_A$  è negativa ( $\theta_A < 0$ ) perché  $y$  è decrescente ( $\Delta y < 0$ ).

Vediamo di applicare i teoremi di Mohr a una trave appoggiata soggetta al carico concentrato  $F$  applicato in mezzeria, punto a inclinazione nulla per ragioni di simmetria e dunque con la tangente alla linea elastica orizzontale (Figura 23.4). Il diagramma del momento flettente  $M$  è positivo ed è rappresentato (Appendice B.2-5) da un triangolo rettangolo di base  $l$  e altezza  $F l / 4$ , il cui baricentro  $G$  dista la lunghezza  $x = (2/3)(l/2)$  da A. L'area  $A_{MAB}$  del diagramma del momento flettente  $M_{AB}$  tra A e la mezzeria della trave B è  $1/2$  della base  $l/2$  (adesso è la metà della lunghezza  $l$  della trave) per l'altezza  $F l / 4$ :

$$A_{MAB} = \frac{1}{2} \left( \frac{l}{2} \frac{F l}{4} \right) = \frac{F l^2}{16}$$

L'inclinazione  $\theta_A$  della linea elastica in A (**23-1**) è data da:

$$\theta_A = \frac{1}{EI} A_{MAB} = \frac{1}{EI} \frac{F l^2}{16} = \frac{F l^2}{16 EI} \quad \ll \text{trave appoggiata con carico concentrato} \gg \quad \mathbf{23-3}$$

mentre l'inflessione totale  $y_{A/B}$  di A relativa a B dà l'inflessione della linea elastica in mezzeria che coincide con la freccia massima  $y_{\max}$ :

$$y_{\max} = y_{A/B} = \frac{1}{EI} A_{MAB} x = \frac{1}{EI} \frac{Fl^2}{16} \left( \frac{2l}{3} \right) = \frac{Fl^3}{48EI} \quad \ll \text{trave appoggiata con carico concentrato} \gg \quad 23-4$$

Si noti come  $\theta_A$  e  $y_{A/B}$  siano rispettivamente l'inclinazione e la freccia massima (Figura 23.4). Come accennato sopra, il metodo di Mohr non precisa il segno dell'inclinazione e dell'inflessione; si può tuttavia osservare che l'inclinazione della linea elastica è negativa secondo il criterio della Figura 23.3, e così pure l'inflessione poiché si verifica un abbassamento della trave, orientato quindi nel verso negativo dell'asse  $y$ .

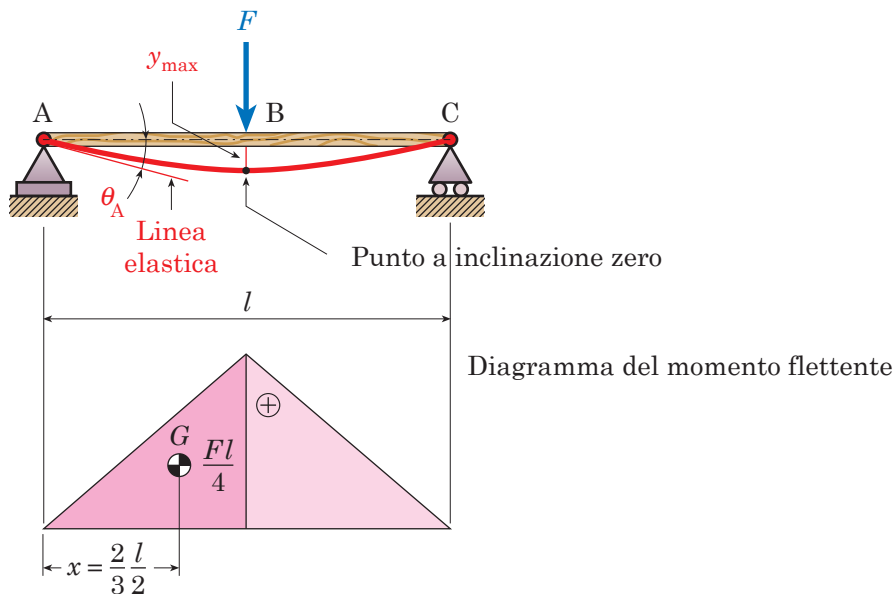


Fig. 23.4 - Metodo di Mohr applicato a una trave appoggiata soggetta a un carico concentrato.

Nel caso del carico concentrato  $F$  applicato all'estremo libero A di una mensola (Figura 23.5), il punto a inclinazione nulla della linea elastica è l'incastro B ( $\theta_B = 0$ ); si devono quindi calcolare inclinazione e inflessione dell'estremo libero A relative all'incastro B. Il diagramma del momento flettente  $M$  è negativo ed è rappresentato (Appendice B.2-1) da un triangolo rettangolo di base  $l$  e altezza  $Fl$ , il cui baricentro  $G$  dista la lunghezza  $x = \left(\frac{2}{3}\right)l$  da A. L'area  $A_{MAB}$  del diagramma del momento flettente  $M_{AB}$  tra A e B è:

$$A_{MAB} = \frac{1}{2} [l(Fl)] = \frac{Fl^2}{2}$$

L'inclinazione  $\theta_A$  della linea elastica in A (23-1) è data da:

$$\theta_A = \frac{1}{EI} A_{MAB} = \frac{1}{EI} \frac{Fl^2}{2} = \frac{Fl^2}{2EI} \quad \ll \text{mensola con carico concentrato} \gg \quad 23-5$$

mentre l'inflessione  $y_{A/B}$  di A relativa a B (punto a inclinazione nulla) dà l'inflessione della linea elastica all'estremo libero A che coincide con la freccia massima  $y_{\max}$ :

$$y_{\max} = y_{A/B} = \frac{1}{EI} A_{MAB} x = \frac{1}{EI} \frac{Fl^2}{2} \left( \frac{2}{3} l \right) = \frac{Fl^3}{3EI} \quad \ll \text{mensola con carico concentrato} \gg \quad \mathbf{23-6}$$

L'inclinazione  $\theta_A$  della linea elastica è negativa (*Figura 23.3*) come pure l'inflessione poiché si verifica un abbassamento della trave, orientato quindi nel verso negativo dell'asse  $y$ .

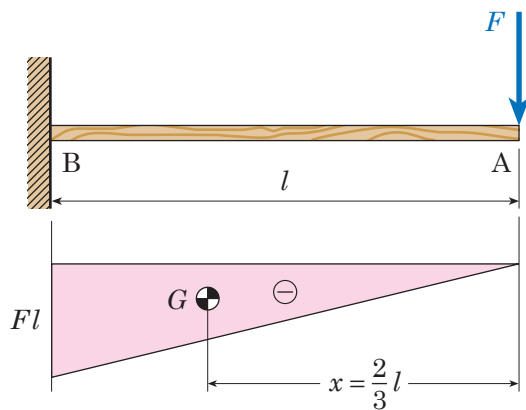


Fig. 23.5 - Metodo di Mohr applicato a una mensola soggetta a un carico concentrato applicato all'estremo libero.

Diagramma del momento flettente

### Esempio 23.1 Albero per riduttore

L'albero per riduttore, schematizzato come una trave semplicemente appoggiata (*Figura 23.6-a*), è in acciaio di modulo elastico  $E = 206 \text{ GPa}$ , lungo  $l = 800 \text{ mm}$ . L'albero è soggetto ai due carichi concentrati  $F_1 = 1 \text{ kN}$  ed  $F_2 = 2 \text{ kN}$ . In corrispondenza della mezzeria della trave, calcolare:

- a) la freccia totale di inflessione  $y$ , somma delle frecce di inflessione  $y'$  dovuta a  $F_1$  (*Figura 23.6-b*) e  $y''$  dovuta a  $F_2$  (*Figura 23.6-c*) in funzione del momento di inerzia  $I$ .

Determinare quindi il diametro  $d$  dell'albero in modo che:

- b) il valore di  $y$  sia inferiore a una freccia massima ammissibile  $y_{\text{amm}} = 200 \text{ }\mu\text{m}$ ;  
 c) la massima tensione  $\sigma_{\max}$  dovuta al momento flettente sia inferiore a una tensione ammissibile  $\sigma_{\text{amm}} = 130 \text{ MPa}$ .

### SOLUZIONE

- a) La freccia di inflessione viene calcolata nella mezzeria della trave che dista  $x = 400 \text{ mm}$  da ciascuno degli appoggi. La freccia di inflessione  $y'$ , dovuta a  $F_1$ , si calcola con la formula dell'Appendice B.2-6 riferita al tratto AC (nell'Appendice è indicato come BC) poiché è in questo tratto che si trova la mezzeria della trave.

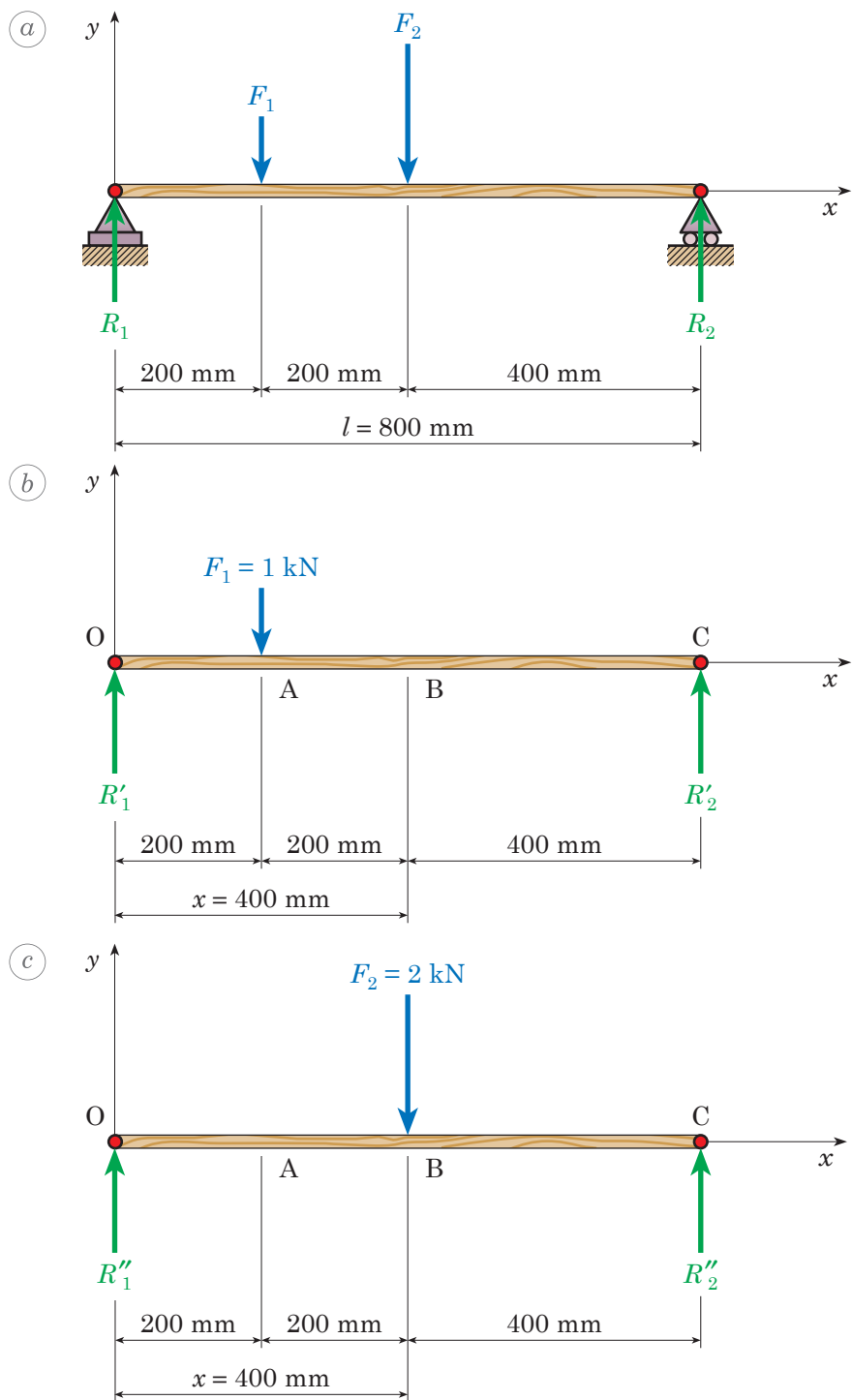


Fig. 23.6 - Albero per riduttore schematizzato come una trave semplicemente appoggiata soggetta a due carichi concentrati.

a) Trave con i due carichi concentrati  $F_1$  ed  $F_2$ .

b) Trave con il solo carico  $F_1$ .

c) Trave con il solo carico  $F_2$ .

$$y_{BC} = \frac{F_1 a (l-x)}{6EI} (x^2 + a^2 - 2lx) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1,0 \times 10^3 \text{ N} (200 \text{ mm}) (800 \text{ mm} - 400 \text{ mm})}{6 \times 206 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \times I \times (800 \text{ mm})} [400^2 + 200^2 - 2 \times 800 \times 400] \text{ mm}^2 = \frac{-35.600 \text{ mm}^5}{I}$$

La freccia  $y''$  dovuta a  $F_2$  si calcola con la formula dell'Appendice B.2-5; questa freccia coincide con la freccia massima  $y_{\max}$ :

$$y_{\max} = -\frac{F_2 l^3}{48EI} \Rightarrow y'' = -\frac{2,0 \times 10^3 \text{ N} (800 \text{ mm})^3}{48 \times 206 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \times I} = -\frac{103.600 \text{ mm}^5}{I}$$

Per il principio di sovrapposizione, la freccia totale  $y$  dovuta ai carichi  $F_1$  ed  $F_2$  è la somma delle due frecce generate dai due carichi trattati separatamente. Essa risulta negativa indicando così che in mezzzeria la linea elastica della trave subisce un abbassamento, orientato cioè nel senso negativo dell'asse  $y$ .

$$y = y' + y'' = -\frac{35.600 \text{ mm}^5}{I} - \frac{103.600 \text{ mm}^5}{I} = -\frac{139.200 \text{ mm}^5}{I} \quad \blacktriangleleft$$

- b) Il momento di inerzia  $I$  è funzione del diametro dell'albero  $d$  (Tabella VII):  $I = \pi d^4/64$ . Ponendo il valore assoluto della freccia  $y$ , appena trovata, uguale a quello della freccia massima ammissibile  $y_{\text{amm}} = 200 \mu\text{m}$  si può calcolare il diametro  $d$ , il cui valore viene arrotondato in eccesso per sicurezza.

$$y = \frac{139.200 \text{ mm}^5}{\frac{\pi d^4}{64}} = 0,200 \text{ mm} \Rightarrow d^4 = \frac{64 \times 139.200 \text{ mm}^5}{\pi \times 0,2 \text{ mm}} = 14,18 \times 10^6 \text{ mm}^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \left(14,18 \times 10^6 \text{ mm}^4\right)^{\frac{1}{4}} = 61,4 \text{ mm} \approx 62 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

- c) Per la verifica di resistenza, occorre determinare il valore massimo  $M_{\max}$  del momento flettente lungo l'albero. Il momento flettente  $M$  lungo la trave varia linearmente in funzione di  $x$  poiché generato dal prodotto di due fattori dei quali uno è costante (forze esterne: carichi e reazioni) e l'altro variabile (la distanza  $x$  di queste forze dalla sezione considerata); il diagramma del momento flettente lungo la trave è perciò rappresentato da tre tratti di retta che cambiano inclinazione nei punti A e B dove intervengono prima il carico  $F_1$  e poi il carico  $F_2$  a modificare il primo fattore (cioè le forze esterne) di questo prodotto. Si applica il principio di sovrapposizione per determinare il momento flettente  $M$  nei due punti A e B, quale somma dei momenti flettenti  $M'$ , dovuto al solo carico  $F_1$  (Appendice B.2-6), ed  $M''$ , dovuto al solo carico  $F_2$  in mezzzeria (Appendice B.2-5).

$$x_A = 0,2 \text{ m} \Rightarrow M' = \frac{F_1 a}{l} (l-x) = \frac{1000 \text{ N} \times 0,2 \text{ m}}{0,8 \text{ m}} \times (0,8 \text{ m} - 0,2 \text{ m}) = 150 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$x_B = 0,4 \text{ m} \Rightarrow M' = \frac{F_1 \alpha}{l} (l - x) = \frac{1000 \text{ N} \times 0,2 \text{ m}}{0,8 \text{ m}} \times (0,8 \text{ m} - 0,4 \text{ m}) = 100 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$x_A = 0,2 \text{ m} \Rightarrow M'' = \frac{F_2 x}{2} = \frac{2000 \text{ N} \times 0,2 \text{ m}}{2} = 200 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$x_B = 0,4 \text{ m} \Rightarrow M'' = \frac{F_2 x}{2} = \frac{2000 \text{ N} \times 0,4 \text{ m}}{2} = 400 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_A = M'_A + M''_A = 150 \text{ N}\cdot\text{m} + 200 \text{ N}\cdot\text{m} = 350 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_B = M'_B + M''_B = 100 \text{ N}\cdot\text{m} + 400 \text{ N}\cdot\text{m} = 500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Il momento flettente massimo si raggiunge perciò nel punto B e vale  $M_{\max} = 500 \text{ N}\cdot\text{m}$ . Si può adesso calcolare la tensione massima  $\sigma_{\max}$  originata dalla flessione (**20-7**) e confrontarla con la tensione ammissibile  $\sigma_{\text{amm}} = 130 \text{ MPa}$ ; trattandosi di acciaio, la tensione ammissibile è uguale sia a trazione che a compressione e quindi la verifica verrà condotta per le sole fibre tese. Il modulo di resistenza a flessione  $Z$  si legge sulla *Tabella VII*.

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{Z} = \frac{M_{\max}}{0,1d^3} = \frac{500.000 \text{ N}\cdot\text{mm}}{0,1 \times (62 \text{ mm})^3} = 21 \text{ MPa} < \sigma_{\text{amm}} = 130 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

Risulta così ampiamente verificata la **19-14**; il criterio più restrittivo è costituito dal limite di  $200 \mu\text{m}$  posto alla massima freccia ammissibile.

## COMMENTI

1. Il segno della freccia di inflessione sta solo a significare un innalzamento della linea elastica (freccia positiva) oppure un abbassamento (freccia negativa). Per la verifica occorre invece introdurre il valore assoluto della freccia in quanto quello che si vuole soddisfare è che la freccia di inflessione di un dato elemento meccanico, ad esempio un albero, non superi il valore limite, indipendentemente dal fatto che l'inflessione determini l'innalzamento o l'abbassamento della linea elastica dell'albero.
2. La limitazione delle deformazioni assolute o relative diviene particolarmente importante nel dimensionamento degli alberi di trasmissione. Vengono infatti richiesti dei valori molto severi della freccia massima ammissibile; in funzione della distanza  $l$  tra gli appoggi questi valori possono essere pari a  $l/2000$  per le applicazioni comuni,  $l/(3000 \div 4000)$  per i riduttori ed  $l/(5000 \div 6000)$  nel caso delle macchine utensili.

### Esempio 23.2 Mensola con due tipi di carico

Una mensola, che ha per sezione il profilato HE M 260 ad ali larghe parallele di modulo di elasticità normale  $E = 206 \text{ GPa} = 206 \times 10^9 \text{ Pa}$ , è lunga  $l = 4,0 \text{ m}$ . La mensola è soggetta al carico concentrato  $F = 8 \text{ kN}$  posto alla distanza  $\alpha = 3 \text{ m}$  dall'incastro e a un carico uni-



formemente distribuito di intensità  $w = 2 \text{ kN/m}$ . In corrispondenza dell'estremità libera C della mensola, determinare:

- la freccia di inflessione  $y'$  dovuta al solo carico concentrato (Figura 23.7-a);
- la freccia  $y''$  dovuta al solo carico distribuito in modo uniforme (Figura 23.7-b);
- applicando il principio di sovrapposizione, determinare la freccia  $y$  dovuta ai carichi combinati.

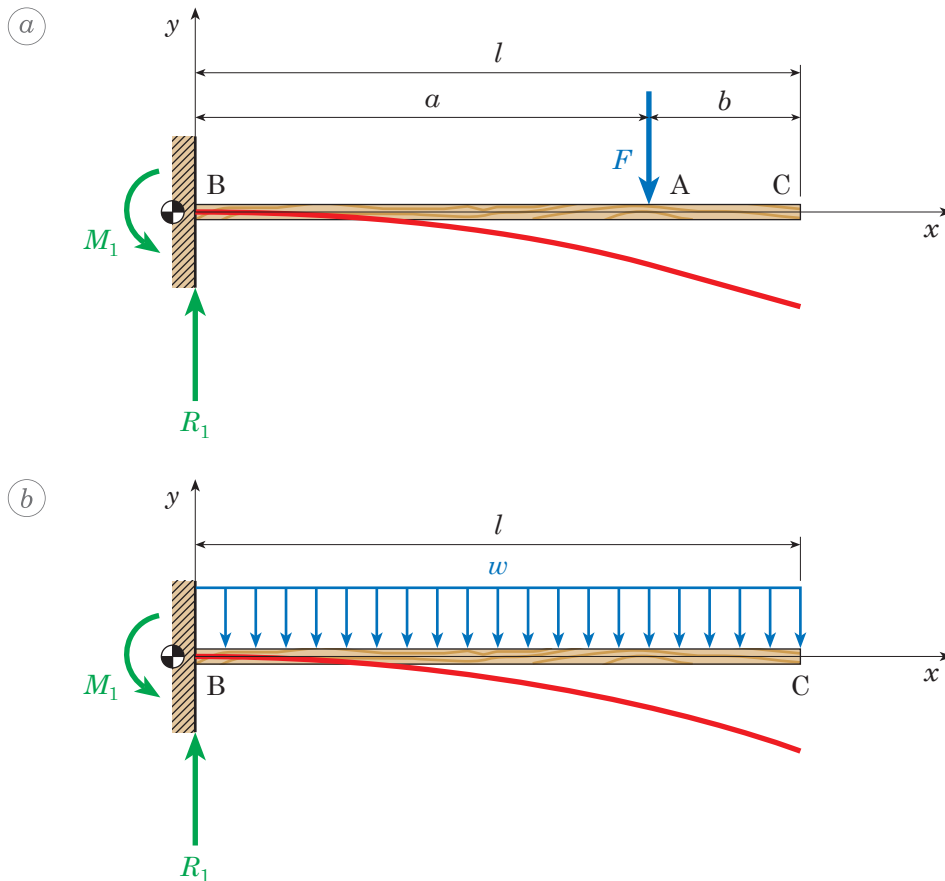


Fig. 23.7 - Mensola dell'Esempio 23.2.

a) Carico concentrato  $F = 8 \text{ kN}$ . b) Carico uniformemente distribuito di intensità  $w = 2 \text{ kN/m}$ .

### SOLUZIONE

- Essendo il carico  $F$  applicato in A, la mensola è sollecitata a flessione nel tratto AB, mentre nel rimanente tratto AC, essendo scarica, non è più soggetta a flessione. La freccia di inflessione  $y'$  all'estremità C si ottiene aggiungendo alla freccia  $y_A$  lo spostamento verticale  $\theta_A b$  prodotto dall'inclinazione  $\theta_A$  in A per il segmento  $b$  che rimane rettilineo poiché la trave in questo tratto non è più soggetta a flessione. Il valore dell'inclinazione e dell'inflessione della linea elastica in A si calcolano con le formule 23-5 e 23-6 sostituendo alla lunghezza  $l$ , la nuova lunghezza  $a$  corrispondente al punto A dove è applicata la

forza  $F$ . In queste formule si tenga conto del segno, che è negativo sia per l'inclinazione (Figura 23.3) che per le frecce della linea elastica (abbassamento dell'asse della trave, orientato quindi nel verso negativo dell'asse  $y$ ). Per rendere più semplici i calcoli che seguono, si calcola la rigidezza flessionale  $EI$  del profilato HE M 260, che ha per momento di inerzia, rispetto all'asse  $x$ ,  $I = 31.300 \times 10^4 \text{ mm}^4 = 31.300 \times 10^{-8} \text{ m}^4$  (Appendice B.1).

$$EI = 206 \times 10^3 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \times 31.300 \times 10^{-8} \text{ m}^4 = 64,5 \text{ MNm}^2$$

$$y_{A/B} = -\frac{Fl^3}{3EI} = -\frac{Fa^3}{3EI} = -\frac{8000 \text{ N} \times (3 \text{ m})^3}{3 \times 64,5 \times 10^6 \text{ Nm}^2} = -1,12 \times 10^{-3} \text{ m} = -1,12 \text{ mm}$$

$$\theta_A = -\frac{Fa^2}{2EI} = -\frac{8000 \text{ N} \times (3 \text{ m})^2}{2 \times 64,5 \times 10^6 \text{ Nm}^2} = -0,56 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$y' = y_{A/B} + \theta_A \times b = -1,12 \text{ mm} - 0,56 \times 10^{-3} \text{ rad} \times 1000 \text{ mm} = -1,68 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

b) Nel caso del carico uniformemente distribuito  $w$ , la freccia  $y''$  viene calcolata con la formula B.2-3 dell'Appendice.

$$y'' = -\frac{wl^4}{8EI} = -\frac{2000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \times (4 \text{ m})^4}{8 \times 64,5 \times 10^6 \text{ Nm}^2} = -0,99 \times 10^{-3} \text{ m} = -0,99 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

c) La freccia totale  $y$  dovuta al carico concentrato  $F$  e al carico distribuito  $w$  è quindi:

$$y = y' + y'' = -1,68 \text{ mm} - 0,99 \text{ mm} = -2,67 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

**COMMENTI** Anche se il valore complessivo dovuto al carico distribuito  $w = 2 \text{ kN/m}$  è uguale a quello del carico concentrato ( $wl = 2 \text{ kN/m} \times 4 \text{ m} = 8 \text{ kN}$ ), la freccia  $y''$  del carico distribuito risulta molto più bassa della freccia  $y'$  dovuta al carico concentrato.

## /// 23.2 Travi iperstatiche

Nel caso piano, le incognite introdotte da un insieme di vincoli equivalente a tre vincoli semplici sono in numero strettamente sufficiente per bloccare ogni spostamento della struttura relativo ai tre gradi di libertà dell'elemento: la struttura risulta staticamente determinata (*isostatica*) e mediante le tre equazioni di equilibrio della statica 4-1 si calcolano le reazioni dei vincoli. Quando le incognite introdotte dalle reazioni dei vincoli sono più di 3, il problema risulta staticamente indeterminato (*statically indeterminate*) in quanto, essendo i vincoli in eccesso (*sovrabbondanti*) rispetto ai 3 gradi di libertà della struttura piana, esistono infinite soluzioni equilibrate: la struttura si dice **iperstatica**. I tipi di strutture piane iperstatiche che si trovano più frequentemente nelle applicazioni sono (Figura 23.8):

a) *Trave a una sola campata con un estremo incastrato e uno appoggiato* – Nel caso di carichi aventi qualsiasi direzione, si hanno a disposizione le tre equazioni di equili-

brio contro le quattro incognite dei vincoli, e cioè tre dell'incastro e uno del carrello. In presenza di carichi verticali le equazioni di equilibrio si riducono a due (forze verticali e momenti) contro tre reazioni incognite, consistenti nelle due reazioni verticali e nel momento di incastro.

- b) *Trave a una sola campata incastrata ai due estremi* – Nel caso di carichi qualsiasi, si hanno a disposizione le tre equazioni di equilibrio contro le sei incognite dei due incastri. In presenza di carichi verticali le equazioni di equilibrio si riducono a due contro quattro reazioni incognite, e cioè due reazioni verticali e due momenti di incastro.
- c) *Trave continua a più campate* – È una trave rettilinea, priva di articolazioni intermedie, con più di due appoggi costituiti generalmente tutti da carrelli scorrevoli salvo uno, che impedisce lo spostamento d'insieme della struttura. Le incognite iperstatiche sono espresse dal numero degli appoggi meno due (due è il numero degli appoggi necessario per garantire l'equilibrio della corrispondente trave isostatica) oppure dal numero delle campate diminuito di uno.

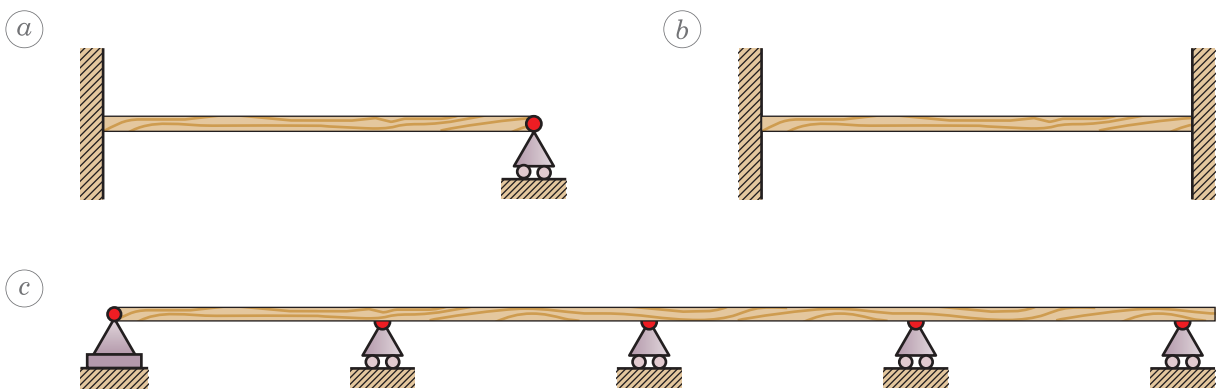


Fig. 23.8 - Tipi di travi iperstatiche che si incontrano più frequentemente nelle applicazioni.

- a) Trave a una sola campata con un estremo incastrato e uno appoggiato.
- b) Trave a una sola campata incastrata alle due estremità.
- c) Trave continua (con 5 appoggi e quattro campate); le incognite iperstatiche sono 3: 5 appoggi meno 2 oppure 4 campate meno 1.

Il *principio di sovrapposizione* offre un metodo generale per il calcolo delle incognite iperstatiche:

1. si sopprimono i vincoli sovrabbondanti facendo così divenire la struttura che rimane (viene chiamata *travatura principale*) isostatica;
2. al posto dei vincoli soppressi, si introducono le reazioni incognite corrispondenti applicate, insieme ai carichi, alla travatura principale;
3. si scrive la deformazione (inflexione  $y$  e/o inclinazione  $\theta$ ) della travatura principale sulle sezioni in cui sono stati soppressi i vincoli sotto l'azione:
  - 3.1 dei carichi,
  - 3.2 delle reazioni incognite;
4. la deformazione complessiva è uguale, per il principio di sovrapposizione, alla somma algebrica delle deformazioni prodotte separatamente dai carichi e dalle reazioni incognite;

5. per ogni vincolo soppresso si scrive un'equazione complementare di congruenza che stabilisce l'annullarsi della deformazione che quel dato vincolo era in grado di impedire, ottenendo tante equazioni complementari quanti sono i vincoli sovrabbondanti.

Una volta determinate le reazioni dei vincoli sovrabbondanti, si calcolano le reazioni della travatura principale isostatica con le tre equazioni di equilibrio della statica 4-1. Si passa quindi, seguendo i metodi presentati nell'Unità 22, alla determinazione del diagramma delle azioni interne (forza di taglio  $T$  e momento flettente  $M$ ) lungo la trave in modo da poterne determinare i valori massimi da utilizzare nel progetto della trave. L'Appendice B.2 riporta le equazioni dell'inflessione  $y$  e il valore della freccia massima di inflessione  $y_{\max}$  dei casi più comuni di travi inflesse, iperstatiche incluse.

### Esempio 23.3 Trave con incastro e appoggio caricata uniformemente

Nella trave con un appoggio e un incastro caricata uniformemente lunga  $l$  (Figura 23.9), si può considerare il carrello B come vincolo sovrabbondante e assumere come travatura principale la trave a mensola incastrata in A e libera in B; la trave principale viene così sottoposta al carico distribuito di intensità  $w$  e alla reazione incognita  $R_2$ , che sostituisce il vincolo sovrabbondante. Sotto l'azione del carico  $w$ , l'estremo B della trave principale subisce lo spostamento  $y_w$  di segno negativo perché, trattandosi di un abbassamento, è orientato nel verso opposto all'asse  $y$  (Appendice B.2-3), mentre la forza concentrata  $R_2$  produce lo spostamento  $y_{R_2}$  di segno positivo perché si tratta di un innalzamento (Appendice B.2-1). In realtà, all'estremo B della trave originale, esiste un vincolo sovrabbondante rappresentato dal carrello che impedisce qualsiasi spostamento di B; la somma dei due spostamenti  $y_w$  e  $y_{R_2}$  prodotti rispettivamente dal carico distribuito  $w$  e dalla forza concentrata  $R_2$  deve perciò risultare uguale a zero se si vuole che il punto B rimanga fisso. Questa equazione di congruenza consente la determinazione della reazione incognita  $R_2$  in funzione del carico distribuito  $w$ .

$$y_w + y_{R_2} = 0 \quad \ll \text{equazione di congruenza} \gg$$

$$y_w + y_{R_2} = -\frac{wl^4}{8EI} + \frac{R_2 l^3}{3EI} = 0 \Rightarrow \frac{R_2 l^3}{3EI} = \frac{wl^4}{8EI} \Rightarrow R_2 = \frac{3wl}{8}$$

Determinata la reazione sovrabbondante  $R_2$ , si completa lo studio della trave applicando le equazioni di equilibrio della statica 4-1 in quanto la trave può ormai essere considerata isostatica: è infatti una mensola incastrata in A e soggetta al carico  $wl$  e alla forza concentrata  $R_2 = (3/8)wl$ .

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_1 + R_2 - wl = 0 \Rightarrow R_1 = wl - \frac{3wl}{8} = +\frac{5wl}{8}$$

$$\curvearrowright \sum M_A = 0 \Rightarrow +M_1 - wl \frac{l}{2} + R_2 l = 0 \Rightarrow M_1 = wl \frac{l}{2} - \frac{3wl}{8} l = +\frac{wl^2}{8}$$

Seguendo il metodo dell'Esempio 22.2, si determina la forza di taglio  $T$  e il momento  $M$  in una generica sezione  $S$ , distante  $x$  dall'incastro A.

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow +R_1 - wx - T = 0 \Rightarrow T = \frac{5wl}{8} - wx$$

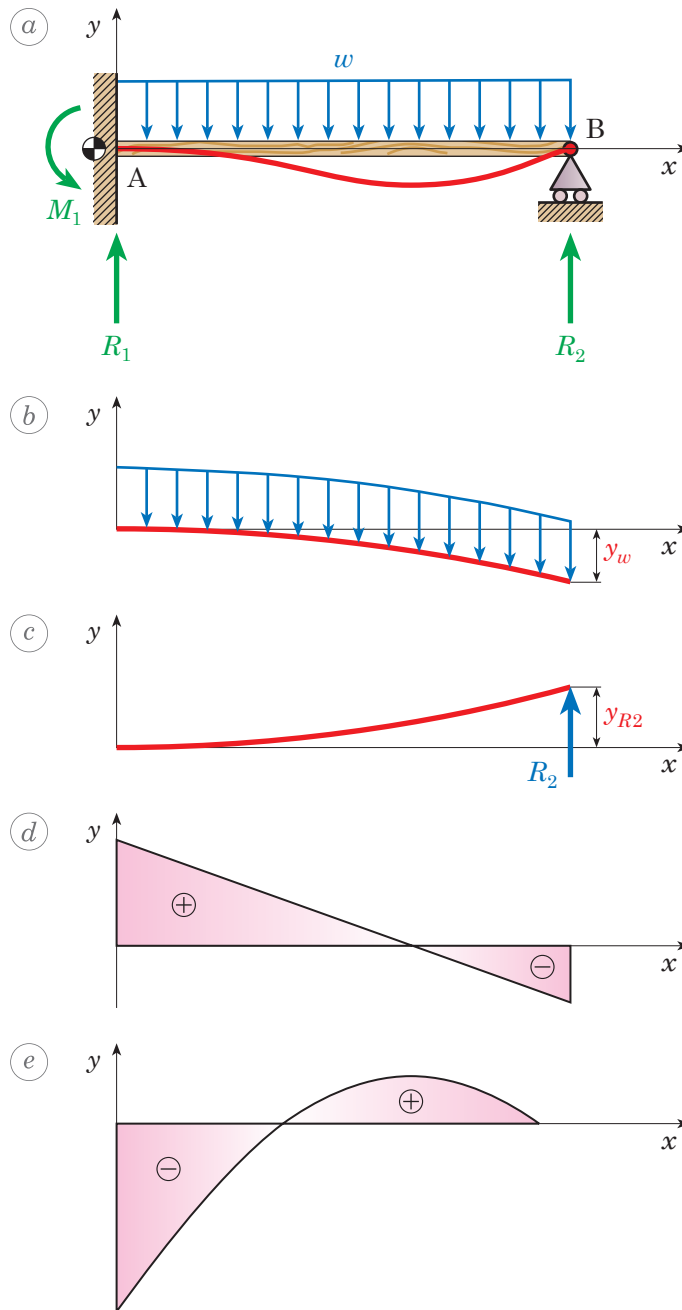


Fig. 23.9 - Trave con incastro e appoggio caricata in modo uniforme (*Appendice B.2-13*).

a) Trave iperstatica con incastro e carrello.

b) Linea elastica della travatura principale (trave con il solo incastro). È indicato l'abbassamento della trave principale  $y_w$  dovuto al carico  $w$ .

c) Innalzamento  $y_{R_2}$  prodotto dalla reazione incognita  $R_2$  che figura come carico perché la trave è stata resa isostatica. È indicato l'innalzamento della trave principale  $y_{R_2}$  dovuto alla reazione incognita  $R_2$ .

d) Diagramma della forza di taglio  $T$ .

e) Diagramma del momento flettente  $M$ .

$$\begin{aligned} \oplus \sum M = 0 &\Rightarrow +M_1 - (R_1 x) + \left( wx \frac{x}{2} \right) + M = \frac{wl^2}{8} - \frac{5wl}{8}x + \frac{wx^2}{2} + M = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow M = -\frac{wl^2}{8} + \frac{5wl}{8}x - \frac{wx^2}{2} = \frac{w}{8}(-4x^2 + 5lx - l^2) \end{aligned}$$

**COMMENTI** Il principio di sovrapposizione può venire utilizzato per determinare, al pari di quanto fatto con le reazioni, le inflessioni delle travi iperstatiche. Si esamini, come esempio, il caso della trave a doppio incastro soggetta a un carico uniformemente distribuito di intensità  $w$  [kN/m] della *Figura 23.10*. Si consideri separatamente l'inflessione massima (in mezzzeria)  $y_{\max}$  prodotta dal carico distribuito  $w$  e dalle due coppie di estremità  $M_1$  ed  $M_2$  sulla trave principale isostatica, che è una trave semplicemente appoggiata. L'inflessione massima  $y_{\max,w}$  dovuta al carico distribuito  $w$  (*Appendice B.2-7*) è negativa, perché l'abbassamento della trave è nel verso opposto delle  $y$  positive. L'inflessione massima  $y_{\max,M}$  dovuta alle due coppie di estremità di ugual valore  $M_1 = M_2 = M$  è invece positiva, perché tende a innalzare la trave nel verso delle  $y$  positive; questa freccia si calcola tenendo presente che ognuna delle due metà della trave si comporta come una trave a mensola soggetta al momento flettente  $M$ : è il caso della mensola soggetta alla coppia di estremità  $M_B$  (*Appendice B.2-4*) per la quale viene presa una lunghezza della trave  $l/2$  al posto di  $l$ ; si sostituisce poi, a  $M$ , il valore dell'incognita iperstatica  $M = wl^2/12$  indicata per la trave a doppio incastro (*Appendice B.2-14*).

$$y_{\max,w} = -\frac{5wl^4}{384EI} \quad y_{\max,M} = +\frac{M(l/2)^2}{2EI} = +\frac{Ml^2}{8EI} = +\frac{wl^2}{12} \frac{l^2}{8EI} = +\frac{wl^4}{96EI}$$

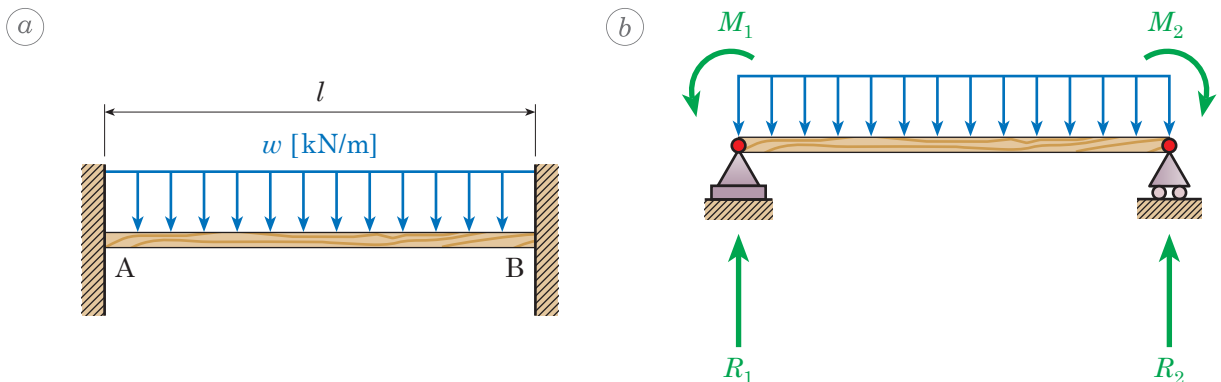


Fig. 23.10 - a) Trave con due incastri di estremità soggetta a un carico uniformemente distribuito. b) Trave principale: è una trave semplicemente appoggiata soggetta al carico distribuito e a due coppie di estremità di momento  $M_1 = M_2$ .

Per il principio di sovrapposizione, l'inflessione massima  $y_{\max}$  della trave incastrata alle due estremità è la somma algebrica delle inflessioni massime dovute al carico distribuito e alle coppie di estremità applicati alla trave principale:

$$y_{\max} = y_{\max,w} + y_{\max,M} = -\frac{5wl^4}{384EI} + \frac{wl^4}{96EI} = -\frac{wl^4}{384EI}$$

### Esempio 23.4 Trave con incastro e appoggio soggetta a un carico concentrato

Nella trave con un appoggio e un incastro soggetta a un carico concentrato a metà della lunghezza  $l$  (Figura 23.11), si considera il carrello B come vincolo sovrabbondante e si assume, come travatura principale, la trave a mensola incastrata in A e libera in C; la trave principale viene così sottoposta al carico concentrato  $F$  e alla reazione incognita  $R_2$ , che sostituisce il vincolo sovrabbondante. Sotto l'azione del carico  $F$ , l'estremo C della trave principale subisce uno spostamento  $y_F$  (Appendice B.2-2, dove si pone  $a = l/2$ ) di segno negativo perché, trattandosi di un abbassamento, è orientato nel verso opposto a quello positivo dell'asse  $y$ , mentre la forza concentrata  $R_2$  produce lo spostamento  $y_{R_2}$  (Appendice B.2-1) di segno positivo perché si tratta di un innalzamento. Esistendo all'estremo C della trave originale il vincolo sovrabbondante del carrello che impedisce qualsiasi spostamento di C, la somma dei due spostamenti  $y_w$  e  $y_{R_2}$  prodotti rispettivamente dal carico concentrato  $F$  e dalla forza concentrata  $R_2$  deve perciò risultare uguale a zero se si vuole che il punto C rimanga fisso. L'equazione di congruenza è allora:

$$y_F + y_{R_2} = -\frac{5Fl^3}{48EI} + \frac{R_2l^3}{3EI} = 0 \Rightarrow \frac{R_2l^3}{3EI} = \frac{5Fl^3}{48EI} \Rightarrow R_2 = +\frac{5F}{16}$$

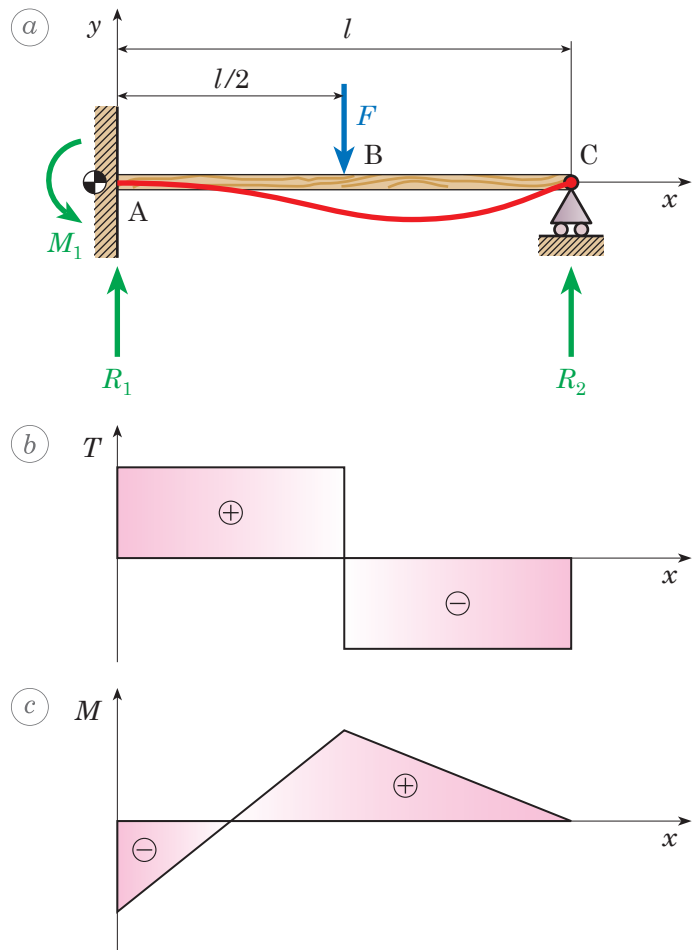


Fig. 23.11 - Trave iperstatica con appoggio e incastro soggetta al carico concentrato  $F$  situato a metà della trave (Appendice B.2-11).

- Trave iperstatica con incastro e carrello.
- Diagramma della forza di taglio  $T$ .
- Diagramma del momento flettente  $M$ .

Determinata la reazione sovrabbondante  $R_2$ , si completa lo studio della trave applicando le equazioni di equilibrio alla trave principale isostatica soggetta alle due forze concentrate  $F$  ed  $R_2 = (5/16)F$ . Scrivendo (4-1) l'equilibrio delle forze verticali e dei momenti rispetto all'incastro A, si ha:

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_1 + R_2 - F = R_1 + \frac{5F}{16} - F = 0 \Rightarrow R_1 = -\frac{5F}{16} + F = +\frac{11F}{16}$$

$$\curvearrowright \sum M_A = 0 \Rightarrow +M_1 - F\frac{l}{2} + R_2l = 0 \Rightarrow M_1 = F\frac{l}{2} - \frac{5F}{16}l = +\frac{3Fl}{16}$$

Si segue il metodo illustrato nell'*Esempio 22.1*. Iniziando dall'estremo A, la forza di taglio  $T$  nella generica sezione  $S$ , distante  $x$  dall'incastro, vale  $+R_1 = +(11/16)F$ ; se al contrario si inizia dall'estremo C, la forza di taglio vale  $-R_2 = -(5/16)F$ . A metà della trave (punto B) in corrispondenza della forza  $F$ , il diagramma della forza di taglio passa per zero ed è qui che il momento flettente  $M$  raggiunge il valore massimo positivo  $M_{\max}$ . Sull'incastro invece (sezione A), il momento flettente raggiunge il valore massimo negativo.

$$M \Big|_{\text{sezione B}} = -M_1 + R_1\frac{l}{2} = -\frac{3Fl}{16} + \frac{11F}{16}\frac{l}{2} = +\frac{5Fl}{32}$$

$$M \Big|_{\text{sezione A}} = -M_1 = -\frac{3Fl}{16}$$



### Esempio 23.8 Stabilità locale di colonne in lega di alluminio

Una colonna, incernierata a entrambi gli estremi, in lega di alluminio 6061-T6<sup>23.8</sup> ( $\sigma_y = 275$  MPa) ha come sezione trasversale un doppio T ad ali larghe (Figura 23.20). Determinare il carico assiale massimo ammesso  $P_{amm}$  nei due casi:

- colonna lunga  $L = 500$  mm;
- colonna lunga  $L = 1500$  mm.

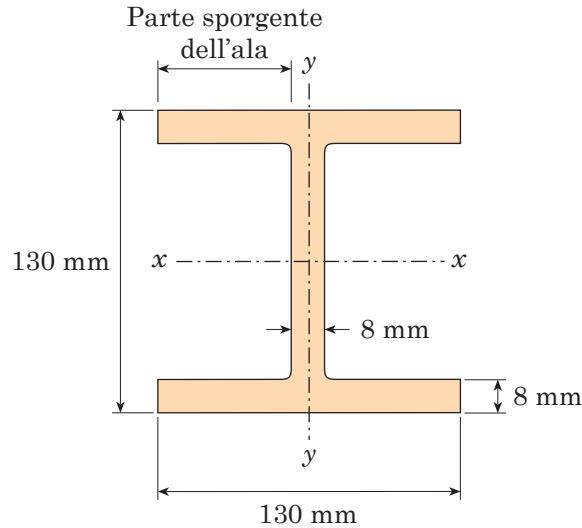


Fig. 23.20 - Sezione trasversale della colonna in lega di alluminio dell'Esempio 23.8: area  $A = 2992$  mm<sup>2</sup> e raggio di inerzia minimo  $k = 31,3$  mm.

### SOLUZIONE

a) La stabilità *complessiva* della colonna in lega di alluminio 6061-T6 viene valutata con le equazioni<sup>23.7</sup>:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{amm} &= 131 \text{ [MPa]} && \ll \text{ per } 0 \leq L_e/k \leq 9,5 \gg \\
 \sigma_{amm} &= 139 - 0,9(L_e/k) \text{ [MPa]} && \ll \text{ per } 9,5 \leq L_e/k \leq 66 \gg \\
 \sigma_{amm} &= (351.400)/(L_e/k)^2 \text{ [MPa]} && \ll \text{ per } 66 \leq L_e/k \gg
 \end{aligned} \right\} \quad \mathbf{23-14}$$

Altri due gruppi di equazioni permettono di definire la stabilità *locale* dei componenti della colonna in lega 6061-T6; queste ultime equazioni hanno, al posto della snellezza

<sup>23.8</sup> - La denominazione è quella ASTM International, nota in passato come American Society for Testing and Materials.

$L_e/k$ , il rapporto tra la larghezza  $b$  e lo spessore  $c$  del componente considerato. Nel caso della sezione a doppio T della Figura si ha:

– per la parte sporgente delle ali:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{amm}} &= 131 \text{ [MPa]} && \ll \text{ per } 0 \leq b/c \leq 5,2 \gg \\ \sigma_{\text{amm}} &= 159 - 5,4(b/c) \text{ [MPa]} && \ll \text{ per } 5,2 \leq b/c \leq 12 \gg \\ \sigma_{\text{amm}} &= (13.581)/(b/c)^2 \text{ [MPa]} && \ll \text{ per } 12 \leq b/c \gg \end{aligned} \right\} \quad \mathbf{23-15}$$

– per l'anima del profilato:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{amm}} &= 131 \text{ [MPa]} && \ll \text{ per } 0 \leq b/c \leq 16 \gg \\ \sigma_{\text{amm}} &= 159 - 1,7(b/c) \text{ [MPa]} && \ll \text{ per } 16 \leq b/c \leq 33 \gg \\ \sigma_{\text{amm}} &= (3378)/(b/c) \text{ [MPa]} && \ll \text{ per } 33 \leq b/c \gg \end{aligned} \right\} \quad \mathbf{23-16}$$

Occorre innanzitutto, con le equazioni **23-15** e **23-16**, determinare la stabilità locale funzione del rapporto  $b/c$  tra larghezza e spessore del componente:

$$\frac{b}{c} = \frac{130 \text{ mm} - 8 \text{ mm}}{2 \times 8 \text{ mm}} = 7,625 \quad \text{nel caso delle ali}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{130 \text{ mm} - 2 \times 8 \text{ mm}}{8 \text{ mm}} = 14,25 \quad \text{nel caso dell'anima}$$

Si applica allora la seconda delle equazioni **23-15** nel caso delle ali e la prima delle **23-16** nel caso dell'anima del profilato:

$$\sigma_{\text{amm}} = 159 - 5,4(b/c) = 159 - 5,4 \times 7,625 = 117,8 \text{ MPa} \quad \sigma_{\text{amm}} = 131 \text{ MPa}$$

Determinata la snellezza  $L_e/k$  sulla base della lunghezza geometrica  $L_e = L$ , poiché la colonna è incernierata alle due estremità mentre il valore minimo del raggio di inerzia  $k$  si legge nella didascalia della *Figura 23.20* si ricava la tensione ammissibile  $\sigma_{\text{amm}}$  (**23-14**) che bisogna rispettare per garantire la stabilità complessiva della colonna.

$$\frac{L_e}{k} = \frac{500 \text{ mm}}{31,3 \text{ mm}} = 16$$

$$\sigma_{\text{amm}} = 139 - 0,9 \frac{L_e}{k} = 139 - 0,9 \times 16 = 124,6 \text{ MPa}$$

Di tutte e tre le tensioni ammissibili calcolate (117,8 MPa, 131 MPa e 124,6 MPa) il valore più restrittivo è quello rappresentato dalla prima tensione ammissibile (117,8 MPa)

relativa alla stabilità locale delle ali. È questa tensione che viene allora utilizzata per il calcolo del carico assiale massimo ammesso  $P_{\text{amm}}$  (il valore dell'area trasversale  $A$  si legge nella didascalia della *Figura 23.20*):

$$\sigma_{\text{amm}} = \frac{P_{\text{amm}}}{A} \Rightarrow P_{\text{amm}} = \sigma_{\text{amm}} \cdot A = 117,8 \text{ MPa} \times 2992 \text{ mm}^2 = 362 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$

b) Quando la colonna è lunga  $L = 1500 \text{ mm}$ , la snellezza diviene:

$$\frac{L_e}{k} = \frac{1500 \text{ mm}}{31,3 \text{ mm}} = 47,9$$

e la tensione ammissibile  $\sigma_{\text{amm}}$ , che garantisce la stabilità complessiva della colonna, è ancora data dalla seconda equazione delle **23-14**:

$$\sigma_{\text{amm}} = 139 - 0,9 \frac{L_e}{k} = 139 - 0,9 \times 47,9 = 95,9 \text{ MPa}$$

Questa volta però la tensione ammissibile, relativa alla stabilità complessiva, risulta quella più severa tra tutte e tre le tensioni calcolate (117,8 MPa, 131 MPa e 95,9 MPa); le tensioni ammissibili locali infatti sono rimaste invariate poiché dipendono dal rapporto tra larghezza e spessore  $b/c$  e non dalla snellezza funzione della lunghezza della colonna. Il carico assiale massimo ammesso  $P_{\text{amm}}$  vale adesso:

$$\sigma_{\text{amm}} = \frac{P_{\text{amm}}}{A} \Rightarrow P_{\text{amm}} = \sigma_{\text{amm}} \cdot A = 95,9 \text{ MPa} \times 2992 \text{ mm}^2 = 287 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$

## SINTESI

Sotto l'azione del carico, una trave si flette deformandosi elasticamente secondo una curva che prende il nome di *linea elastica*, curva che viene caratterizzata da due parametri: l'inflessione o freccia della linea e l'inclinazione. Tener presente questi parametri della linea elastica è essenziale nel progetto di alcune strutture o dei collegamenti tra gli elementi della macchina, poiché il massimo valore dell'inflessione può risultare la condizione di gran lunga più severa nel progetto di queste strutture.

In una *struttura iperstatica*, il principio di sovrapposizione offre un metodo generale per il calcolo delle incognite iperstatiche:

1. si sopprimono i vincoli sovrabbondanti facendo così divenire isostatica la struttura che rimane;
2. al posto dei vincoli soppressi, si introducono le reazioni incognite corrispondenti applicate, insieme ai carichi, alla travatura resa isostatica;
3. si scrive la deformazione della trave isostatica sulle sezioni in cui sono stati soppressi i vincoli;
4. la deformazione complessiva è uguale, per il principio di sovrapposizione, alla somma algebrica delle deformazioni prodotte separatamente dai carichi e dalle reazioni incognite;
5. per ogni vincolo soppresso si scrive un'*equazione complementare di congruenza* che stabilisce l'annullarsi della deformazione che quel dato vincolo era in grado di impedire, ottenendo tante equazioni complementari quanti sono i vincoli sovrabbondanti.

Una volta determinate le reazioni dei vincoli sovrabbondanti, si calcolano le reazioni della travatura principale isostatica con le tre equazioni di equilibrio della statica.

## VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO

5. L'equazione complementare di congruenza è l'equazione che stabilisce l'annullarsi della deformazione che il vincolo sovrabbondante della trave iperstatica era in grado di impedire.

Vero  Falso