Esempio 31.6 Proprietà di ristagno dell'aria in un condotto

In un condotto isolato a sezione variabile scorre, in modo reversibile e senza scambio di lavoro con l'esterno, dell'aria avente le seguenti caratteristiche:

– all'ingresso: temperatura statica $T_1 = 800$ K e velocità $v_1 = 150$ m/s;
– all'uscita: pressione statica $p_2 = 100$ kPa e velocità $v_2 = 600$ m/s.

Determinare:

a) le temperature di ristagno T_{01} all'entrata e T_{02} all'uscita del condotto;

b) la temperatura statica T_2 all'uscita;

c) la pressione di ristagno p_{01} all'entrata;

d) il rapporto A_1/A_2 tra la sezione di ingresso e quella di uscita.

SOLUZIONE

a) Il flusso è isentropico in quanto la trasformazione è reversibile e adiabatica (abbiamo detto che il condotto è isolato). Per la definizione **31-10**, possiamo allora scrivere che l'entalpia di ristagno o entalpia totale nella sezione di entrata h_{01} (nella definizione era stata indicata con h_0) è data da:

$$h_0 = h_{01} = h_1 + \frac{v_1^2}{2}$$

relazione che, per un gas perfetto, diviene (**28-10**):

$$c_p\left(T_{01} - T_1\right) = \frac{v_1^2}{2}$$

Risolvendo rispetto alla temperatura di ristagno in ingresso T_{01} e utilizzando per l'aria il valore $c_p = 1{,}0035$ kJ/(kg·K) = 1003,5 J/(kg·K) (*Tabella A.5)*, si ha:

$$T_{01} = \frac{v_1^2}{2c_p} + T_1 = \frac{\left(150 \text{ m/s}\right)^2}{2 \times 1003{,}5 \text{ J/(kg·K)}} + 800 \text{ K} = 811{,}2 \text{ K} \quad ◀$$

La temperatura di ristagno all'uscita del condotto T_{02} è uguale a quella in ingresso T_{01} dal momento che, lungo il condotto, non vi è scambio né di calore né di lavoro. Indicato con T_0 il valore costante della temperatura di ristagno, possiamo scrivere che:

$$T_{01} = T_{02} = T_0 = 811{,}2 \text{ K} \quad ◀$$

b) La temperatura statica T_2 all'uscita si calcola sempre con la relazione **31-10**, scritta nella forma precedente, che tiene conto del gas perfetto, e applicata alla sezione di uscita dove la velocità ha il valore v_2:

$$T_2 = T_{02} - \frac{v_2^2}{2c_p} = 811{,}2 \text{ K} - \frac{\left(600 \text{ m/s}\right)^2}{2 \times 1{,}0035 \times 10^3 \text{ J/(kg·K)}} = 631{,}8 \text{ K} \quad ◀$$

c) Possiamo ricavare la pressione di ristagno p_{02} all'uscita con la relazione **A-37**, in *Appendice*, che lega pressione e temperatura del gas perfetto:

$$p_{02} = p_2\left(\frac{T_{02}}{T_2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} = 100 \text{ kPa}\left(\frac{811{,}2 \text{ K}}{631{,}8 \text{ K}}\right)^{1{,}4/(1{,}4-1)} = 239{,}8 \text{ kPa}$$

Ma in un flusso isentropico e senza scambio di lavoro, così come avviene per la temperatura di ristagno, la pressione di ristagno in ingresso è uguale a quella all'uscita, assume cioè il valore costante p_0. Otteniamo così il valore della pressione di ristagno in ingresso:

$$p_{01} = p_{02} = p_0 = 239{,}8 \text{ kPa}$$ ◀

d) Per l'equazione di continuità **15-2** in cui mettiamo, al posto della massa volumica ρ, il valore ricavato dall'equazione di stato del gas perfetto **28-1**, si ha:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1}{RT_1} A_1 v_1 = \frac{p_2}{RT_2} A_2 v_2$$

e il rapporto tra l'area di ingresso A_1 e quella di uscita A_2 è:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{p_2 v_2 T_1}{p_1 v_1 T_2}$$

La pressione p_1 si ottiene sempre con l'equazione **A-37**:

$$p_1 = p_{01}\left(\frac{T_1}{T_{01}}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} = 239{,}8 \text{ kPa}\left(\frac{800 \text{ K}}{811{,}2 \text{ K}}\right)^{1{,}4/(1{,}4-1)} = 228{,}4 \text{ kPa}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{p_2 v_2 T_1}{p_1 v_1 T_2} = \frac{100 \text{ kPa} \times 600 \text{ m/s} \times 800 \text{ K}}{228{,}4 \text{ kPa} \times 150 \text{ m/s} \times 631{,}8 \text{ K}} = 2{,}22$$ ◀

Esempio 31.7 Proprietà del vapore nel distributore di una turbina

In una data sezione del distributore di una turbina a vapore si ha: pressione di ristagno $p_0 = 800$ kPa, temperatura di ristagno $T_0 = 200$ °C e pressione statica $p = 350$ kPa. Utilizzando il diagramma di Mollier, determinare:

a) la temperatura statica T e i corrispondenti valori di entalpia h e di volume massico ν;

b) la velocità del vapore v;

c) la portata del vapore riferita all'unità di area $\dot{m}/A$.

SOLUZIONE

a) Sul diagramma di Mollier (*Paragrafo 29.5*), in corrispondenza di $p_0 = 800$ kPa e $T_0 = 200$ °C, leggiamo entalpia ed entropia:

$$h_0 = 2839 \text{ kJ/kg}, \quad s_0 = 6{,}815 \text{ kJ/(kg·K)}$$

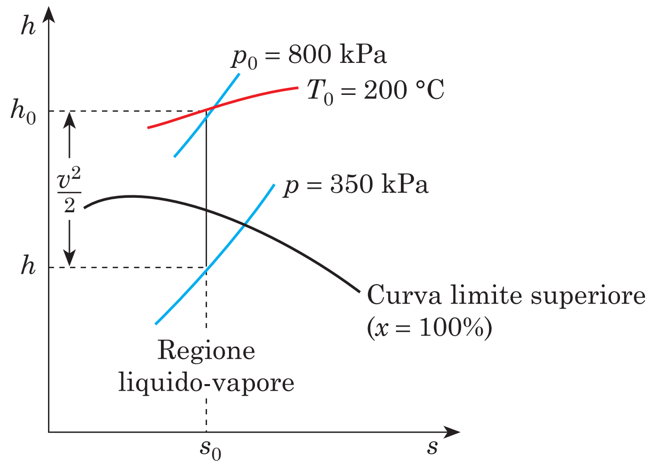

Fig. 31.8 - Condizioni del vapore relative all'*Esempio 31.7*.

Le condizioni di ristagno corrispondono, per definizione, alla trasformazione isentropica caratterizzata, sul diagramma di Mollier, dall'intersezione della verticale $s = s_0$ e l'isobara con pressione statica $p = 350$ kPa (*Figura 31.8*). Il punto si trova all'interno della regione liquido-vapore; la temperatura T è allora quella di saturazione corrispondente alla pressione p. Sul diagramma di Mollier leggiamo:

$$T = 139\ °\text{C} \qquad h = 2681\ \text{kJ/kg} \qquad \nu = 0{,}5\ \text{m}^3/\text{kg}$$ ◀

b) La velocità si ottiene con la **31-11**:

$$v = \sqrt{2\left(h_0 - h\right)} = \sqrt{2\Delta h} = \sqrt{2\left(2839 - 2681\right)\times 10^3\ \text{J/kg}} = \sqrt{2\times 158\times 10^3\ \text{J/kg}} = 562{,}1\ \text{m/s}$$ ◀

Il valore della velocità del vapore v poteva anche essere ricavato utilizzando la scala di conversione, posta in alto sulla sinistra, del diagramma di Mollier (**31-12**); entrando con $\Delta h = 158$ kJ/kg (valori a sinistra), leggiamo (a destra) un valore della velocità $v \approx 560$ m/s.

c) Per l'equazione di continuità **15-2** scritta in funzione del volume massico ν, si ha:

$$\dot{m} = \frac{Av}{\nu} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{m}}{A} = \frac{v}{\nu} = \frac{562{,}1\ \text{m/s}}{0{,}5\ \text{m}^3/\text{kg}} = 1124{,}2\frac{\text{kg/s}}{\text{m}^2}$$ ◀

Esempio 31.8 Velocità del suono nel vapore in un condotto

Calcolare la velocità del suono c nel vapore che scorre in un condotto con temperatura $T = 200$ °C e pressione $p = 0{,}8$ MPa.

SOLUZIONE

Siamo nella regione del vapore surriscaldato (*Tabella A.3.3*); applichiamo allora la **31-13** con $\gamma = 1{,}3$ e un valore del volume massico $\nu = 1/\rho = 0{,}2608\ \mathrm{m^3/kg}$ ricavato dalla Tabella:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma p \nu} = \sqrt{1{,}3 \times 800.000\ \mathrm{Pa} \times 0{,}2608\ \mathrm{m^3/kg}} = 520{,}8\ \mathrm{m/s}$$ ◀

Esempio 31.9 Numero di Mach dell'aria in un condotto

Dell'aria scorre in un condotto con velocità $v = 500$ m/s. Determinare il numero di Mach M:

a) in corrispondenza di due livelli di temperatura pari a 298 K e 1200 K;

b) qualora, al posto dell'aria, nel condotto venga fatto scorrere elio alla temperatura di 298 K.

SOLUZIONE

a) La velocità del suono c si calcola con la **31-15**:

$$c = 20{,}04\sqrt{T} = 20{,}04\sqrt{298\ \mathrm{K}} = 346\ \mathrm{m/s}$$

mentre il numero di Mach M si calcola con la **31-16**:

$$M = \frac{v}{c} = \frac{500\ \mathrm{m/s}}{346\ \mathrm{m/s}} = 1{,}44 \quad \text{(flusso supersonico)}$$ ◀

Analogamente alla temperatura di 1200 K, si ha:

$$c = 20{,}04\sqrt{\mathrm{J/(kg{\cdot}K)}}\sqrt{1200\ \mathrm{K}} = 694{,}4\ \mathrm{m/s} \qquad M = \frac{500\ \mathrm{m/s}}{694{,}4\ \mathrm{m/s}} = 0{,}72 \quad \text{(flusso subsonico)}$$ ◀

b) La velocità del suono nel caso dell'elio viene calcolata con la formula generale **31-14**, mentre le costanti dell'elio si ricavano dalla *Tabella A.5*:

$$c = \sqrt{\gamma R T} = \sqrt{1{,}667 \times 2{,}077 \times 10^3\ \mathrm{J/(kg{\cdot}K)} \times 298\ \mathrm{K}} = 1015{,}8\ \mathrm{m/s}$$

$$M = \frac{v}{c} = \frac{500\ \mathrm{m/s}}{1015{,}8\ \mathrm{m/s}} = 0{,}49 \quad \text{(flusso subsonico)}$$ ◀

COMMENTI Si osservi il sensibile aumento della velocità del suono c all'aumentare della temperatura dell'aria. Parallelamente, essendo costante la velocità della corrente v, il flusso passa da supersonico a subsonico. Nel caso dell'elio, gas molto più leggero dell'aria, la velocità del suono è molto più alta di quella dell'aria e allora il flusso rimane subsonico anche se la temperatura è bassa.

31.8 Andamento delle aree in un condotto

La velocità di propagazione delle perturbazioni della pressione, quando confrontata con la velocità della corrente, costituisce un'importante misura degli effetti della comprimibilità del fluido. Quando un gas, come l'aria, oppure un vapore si muove con una velocità abbastanza più bassa di quella del suono (*regime iposonico*), il fluido non manifesta la sua comprimibilità. Non avviene però così a velocità della corrente di poco inferiori a quella del suono (*regime subsonico*) e tanto meno a velocità maggiori (*regime supersonico*) o molto più grandi (*regime ipersonico*). Il comportamento del fluido nel passare da una velocità più bassa a una velocità più alta di quella del suono cambia drasticamente: a velocità inferiore a quella del suono ciò che avviene in un punto del campo di moto influenza ed è, a sua volta, influenzato da ciò che avviene in ogni altro punto. A velocità maggiori di quella del suono esistono in ogni punto del campo di moto delle zone di influenza e delle zone di silenzio. Il fenomeno più vistoso legato ai mezzi che si muovono a velocità prossime a quelle del suono (*regime transonico*) oppure superiori è rappresentato dal formarsi di onde d'urto che sono delle discontinuità nel campo di moto attraverso le quali si verifica un brusco aumento della pressione e dell'entropia (il fenomeno è dissipativo) e una brusca diminuzione della velocità. Per lungo tempo, nel progetto delle macchine, si è evitato con cura di avvicinarsi a velocità della corrente prossime a quella del suono proprio per evitare la comparsa di fenomeni – in primo luogo le onde d'urto – non sufficientemente conosciuti e quindi poco dominabili. Più recentemente la possibilità di disporre di misure accurate del campo di moto e lo sviluppo di modelli multidimensionali hanno consentito la realizzazione di macchine che, funzionando con fluidi di lavoro che si muovono con velocità prossime oppure superiori a quella del suono, sono in grado di cogliere alcuni vantaggi propri del regime supersonico.

Consideriamo due casi estremi del comportamento del condotto: ugello e diffusore. Ricordiamo che l'ugello è un condotto accelerante in cui si vuole aumentare la velocità del fluido e diminuirne la pressione, mentre il diffusore è un condotto decelerante in cui si vuole diminuire la velocità e aumentare la pressione nella corrente. La *Figura 31.9* illustra il comportamento di un ugello e di un diffusore nei due casi di regime subsonico ($M < 1$) e supersonico ($M > 1$). Nel caso di un *ugello*, se il moto è subsonico, a una diminuzione dell'area della sezione trasversale del condotto corrisponde una diminuzione della pressione, mentre la velocità aumenta. È lo stesso comportamento che avevamo osservato trattando con l'equazione di Bernoulli un flusso incomprimibile in un ugello. Quando il regime diviene supersonico, l'andamento dell'area di passaggio dell'ugello si inverte completamente dal momento che il fluido deve incontrare, nel suo moto, sezioni di area via via crescente perché si verifichi la diminuzione della pressione e l'aumento della velocità. Rimane ancora valido, sia nel caso subsonico sia in quello supersonico, l'andamento relativo della velocità e della pressione: la velocità aumenta e la pressione diminuisce all'avanzare del fluido nel condotto.

Nel caso di un *diffusore*, l'obiettivo di decelerare la corrente viene raggiunto attraverso un andamento delle aree di passaggio opposto a quello illustrato nel caso dell'ugello.

Di solito il gas o il vapore si trova in una condizione di quiete con velocità e numero di Mach uguali a zero. Se si vuole accelerare la corrente da questo stato di riposo fino a velocità supersoniche l'unica soluzione è quella di far percorrere al fluido, che si trova in condizioni subsoniche, il primo tratto *convergente* (in alto a sinistra nella *Figura 31.9)* in modo che il flusso acceleri fino alla velocità sonica ($M = 1$) e poi imboccare il secondo tratto *diver-*

gente (in basso a sinistra nella *Figura 31.9)* in modo da accelerare ulteriormente il fluido utilizzando le leggi del moto supersonico.

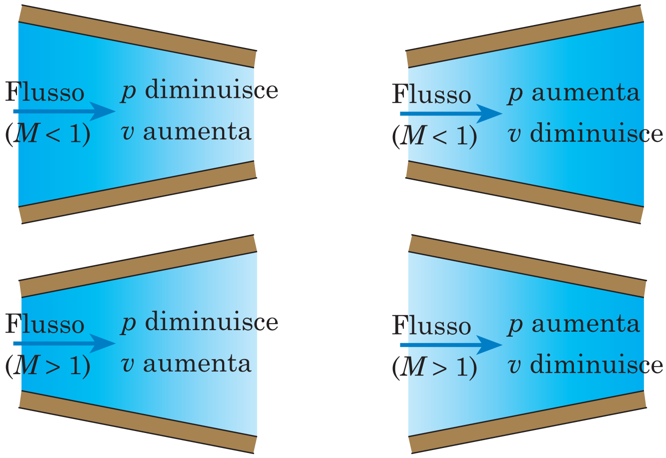

Fig. 31.9 - Effetto della variazione dell'area su un fluido comprimibile.

Il risultato è rappresentato da (*Figura 31.10*) un ugello *convergente-divergente* (*ugello De Laval*) caratterizzato da una sezione *minima* o *ristretta*, la gola dell'ugello, che collega i due tratti convergente e divergente in cui si raggiunge la velocità del suono ($M = 1$). Lo studente probabilmente sa che i motori a razzo usano degli ugelli convergenti-divergenti e può rimanere sorpreso per il fatto che anche le turbine a vapore usino gli stessi ugelli per produrre alte velocità di efflusso. I condotti di ingresso dell'aria dei motori a getto supersonici utilizzano passaggi convergenti-divergenti nel modo opposto, portando cioè un flusso, inizialmente supersonico, fino a una bassa velocità subsonica e renderlo così adatto alla compressione e alla successiva combustione.

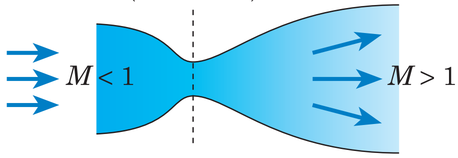

Fig. 31.10 - Schema di ugello De Laval.

31.9 Proprietà critiche

Per caratterizzare l'efflusso del gas in un condotto occorre disporre di relazioni che leghino tra loro le proprietà locali (massa volumica ρ, pressione p e temperatura T) e le proprietà di ristagno (ρ_0, p_0 e T_0) con il numero di Mach M. Di particolare interesse sono i rapporti tra le temperature T_0/T e tra le pressioni p_0/p[31.3]; si passa dal rapporto tra le temperature a quello tra le pressioni con la relazione $p_0/p = \left(T_0/T\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$ (**A-37**) valida per la trasformazione isentropica.

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2 \qquad \textbf{31-17}$$

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2\right]^{\gamma/(\gamma-1)} \qquad \textbf{31-18}$$

Si possono individuare le condizioni del flusso nella sezione minima dell'ugello, osservando che in questa sezione il numero di Mach M è uguale a uno. Le proprietà nella sezione minima, dette **proprietà critiche**, vengono indicate facendo seguire il simbolo da un asterisco (*). In particolare, se nell'equazione **31-18** poniamo $M = 1$, otteniamo il rapporto tra la *pressione critica* p^* e la *pressione di ristagno* p_0, detto rapporto critico *delle pressioni*:

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \qquad \textbf{31-19}$$

Quando nella sezione ristretta dell'ugello si raggiunge la velocità del suono, nell'ugello passa la massima portata compatibilmente con i valori di pressione e temperatura di ristagno che esistono a monte dell'ugello. Anche se la pressione a valle viene ridotta al di sotto della pressione critica p^* non si può verificare alcun aumento della portata in quanto nella sezione minima dell'ugello la pressione di uscita si mantiene costante e uguale alla pressione critica p^* in corrispondenza di $M = 1$.

Prendendo un rapporto delle capacità massiche γ per l'aria uguale a 1,4, per il vapore surriscaldato uguale a 1,3 e per il vapore saturo uguale a 1,135, il rapporto critico dato dalla **31-19** assume i seguenti valori:

$$\left.\frac{p^*}{p_0}\right|_{\text{aria}} = 0{,}528 \qquad \left.\frac{p^*}{p_0}\right|_{\text{vap surr}} = 0{,}546 \qquad \left.\frac{p^*}{p_0}\right|_{\text{vap sat}} = 0{,}577 \qquad \textbf{31-20}$$

Esempio 31.10 Flusso d'aria in un ugello convergente

Da un condotto effluisce aria attraverso un ugello semplicemente convergente con sezione di uscita $A_U = 520$ mm^2. Pressione e temperatura di ristagno a monte del convergente valgono rispettivamente $p_0 = 1042$ kPa e $T_0 = 400$ K. Calcolare la portata d'aria $\dot{m}$ allorché la pressione di uscita ha un valore p_2 uguale a quello della pressione critica.

SOLUZIONE

Per l'aria il rapporto critico delle pressioni vale (**31-20**):

$$\frac{p^*}{p_0} = 0{,}528$$

La pressione critica è allora:

$$p^* = 0{,}528 p_0 = 0{,}528 \times 1042 \text{ kPa} = 550 \text{ kPa}$$

La portata nella sezione di uscita U si calcola con l'equazione di continuità **15-2**:

$$\dot{m} = \rho_U A_U v_U$$

In quest'equazione l'area della sezione di uscita A_U è un dato dell'*Esempio*, mentre occorre ricavare la massa volumica critica $\rho * = \rho_U$ per mezzo dell'equazione di stato dei gas perfetti **28-1** e la velocità v_U che, essendo la sezione critica, coincide con la velocità del suono c data, per l'aria, dalla **31-15**. In ambedue le equazioni compare la temperatura critica T^*; dobbiamo allora ottenere prima di tutto la temperatura con l'equazione **31-17**:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2$$

dove posto $M = 1$, perché il calcolo si riferisce alla sezione critica, abbiamo:

$$\frac{T_0}{T^*} = 1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma + 1}$$

$$T^* = T_0 \frac{2}{\gamma + 1} = 400 \frac{2}{1{,}4 + 1} = 333{,}3 \text{ K}$$

$$\rho_U = \rho^* = \frac{p^*}{RT^*} = \frac{550 \text{ kPa}}{0{,}287 \text{ kJ/(kg·K)} \times 333{,}3 \text{ K}} = 5{,}75 \text{ kg/m}^3$$

$$c = 20{,}04 \sqrt{\text{J/(kg·K)}}\sqrt{T^*} = 20{,}04 \sqrt{333{,}3 \text{ K}} = 366 \text{ m/s}$$

$$\dot{m} = \rho^* A_U c = 5{,}75 \text{ kg/m}^3 \times 520 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \times 366 \text{ m/s} = 1{,}094 \text{ kg/s}$$ ◀

COMMENTI Comunque venga fatta scendere la pressione di uscita p_2 al di sotto della pressione critica ($p^* = 550$ kPa), la portata $\dot{m}$ non può aumentare poiché la portata massima (1,094 kg/s) viene raggiunta nelle condizioni critiche. Nell'ugello passa così la massima portata compatibile con i valori di pressione e temperatura di ristagno che esistono a monte dell'ugello. Ugelli convergenti critici vengono spesso utilizzati come strumenti di misura della portata poiché nelle condizioni critiche la portata è indipendente dalla pressione di uscita. Spesso gli ugelli critici vengono utilizzati per mantenere un flusso stazionario in sistemi, come i reattori chimici, indipendentemente dalle fluttuazioni della pressione nella camera di reazione.

Esempio 31.11 Distributore di una turbina

In un ugello convergente-divergente del distributore di una turbina si vuole fare espandere una portata di vapor d'acqua $\dot{m} = 5$ kg/s dalle condizioni di pressione di 800 kPa, temperatura 250 °C e velocità trascurabile fino alla pressione di 250 kPa.

Nell'ipotesi di flusso isentropico e con l'aiuto del diagramma di Mollier (si veda il *Paragrafo 29.5*), determinare:

a) velocità del vapore nella sezione ristretta;

b) area della sezione ristretta;

c) velocità e area della sezione di uscita;

d) pressione di ristagno all'uscita dell'ugello.

SOLUZIONE

a) All'ingresso dell'ugello la velocità è nulla e quindi i valori assegnati di pressione e temperatura rappresentano le condizioni di ristagno della corrente pari a $p_0 = 800$ kPa e $T_0 = 250$ °C (*Figura 31.11*). Per queste condizioni di pressione e temperatura, leggiamo sul diagramma di Mollier: $h_0 = 2950$ kJ/kg ed $s_0 = 7{,}04$ kJ/(kg·K).

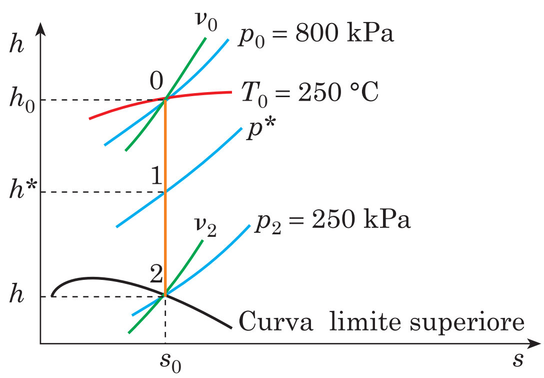

Fig. 31.11 - Espansione del vapore relativa all'*Esempio 31.11* sul diagramma di Mollier.

Vediamo innanzitutto come è il flusso nella sezione ristretta; per questo calcoliamo la pressione critica p^* in base al rapporto critico delle pressioni relativo al vapore surriscaldato (**31-20**):

$$\frac{p^*}{p_0} = 0{,}546 \quad \Rightarrow \quad p^* = 0{,}546\, p_0 = 0{,}546 \times 800 \text{ kPa} = 437 \text{ kPa}$$

La pressione critica ($p^* = 437$ kPa) risulta maggiore della pressione esistente all'uscita dell'ugello ($p_2 = 250$ kPa) e quindi nella sezione ristretta si raggiunge la velocità del suono ($v^* = c$). La velocità del vapore nella sezione ristretta si calcola con l'equazione **31-11** che è funzione della differenza di entalpia tra il punto 0 e il punto 1, individuato dall'intersezione della verticale a entropia costante s_0 (l'espansione si considera isentropica) con l'isobara p^*. Nel punto 1 leggiamo: $T^* = 190$ °C, $\nu^* = 0{,}45$ m^3/kg e $h^* = 2825$ kJ/kg.

$$v^* = \sqrt{2\left(h_0 - h^*\right)} = \sqrt{2\left(2950 \times 10^3 \text{ J/kg} - 2825 \times 10^3 \text{ J/kg}\right)} = 500 \text{ m/s}$$ ◀

La velocità del vapore nella sezione ristretta si può calcolare anche con l'equazione **31-13** che dà la velocità del suono c, mettendo al posto della massa volumica il volume massico ($\nu = 1/\rho$) e utilizzando il valore approssimato di γ pari a 1,3 del *Paragrafo 31.7*:

$$c = \sqrt{\left(\gamma \frac{p}{\rho}\right)} = \sqrt{\gamma p \nu} = \sqrt{1{,}3 \times 437 \times 10^3 \text{ Pa} \times 0{,}45 \text{ m}^3\text{/kg}} = 505{,}6 \text{ m/s}$$

valore praticamente coincidente con quello che avevamo calcolato prima.

b) L'area della sezione ristretta si ricava con l'equazione di continuità **15-2**:

$$\dot{m} = \frac{A^* v^*}{\nu^*} \quad \Rightarrow \quad A^* = \frac{\dot{m}\nu^*}{v^*} = \frac{5 \text{ kg/s} \times 0{,}45 \text{ m}^3\text{/kg}}{500 \text{ m/s}} = 0{,}0045 \text{ m}^2 = 4500 \text{ mm}^2$$

c) All'uscita dell'ugello conosciamo $p_2 = 250$ kPa e $s_0 = 7{,}04$ kJ/(kg·K), mentre sul diagramma di Mollier leggiamo $T_2 = 127$ °C, $\nu_2 = 0{,}72$ m^3/kg e $h_2 = 2720$ kJ/kg.

Con questi valori otteniamo, con la **31-11**, la velocità v_2 e, con la **15-2**, l'area della sezione di uscita A_2:

$$v_2 = \sqrt{2\left(h_0 - h_2\right)} = \sqrt{2\left(2950 \times 10^3 \text{ J/kg} - 2720 \times 10^3 \text{ J/kg}\right)} = 678 \text{ m/s} \quad ◀$$

$$A_2 = \frac{\dot{m}\nu_2}{v_2} = \frac{5 \text{ kg/s} \times 0{,}72 \text{ m}^3\text{/kg}}{678 \text{ m/s}} = 0{,}0053 \text{ m}^2 = 5300 \text{ mm}^2 \quad ◀$$

d) La pressione di ristagno all'uscita p_{02} è uguale a p_0, in quanto in un ugello isentropico la pressione di ristagno si conserva lungo il condotto (*Paragrafo 31.6*):

$$p_{01} = p_{02} = p_0 = 800 \text{ kPa} \quad ◀$$

Esempio 31.12 Sezione di un ugello e pressione di uscita

Vapore, avente una portata $\dot{m} = 3$ kg/s, si espande in modo isentropico in un ugello dove entra con pressione $p_0 = 1$ MPa e temperatura di ristagno $T_0 = 350$ °C. Determinare, con l'aiuto del diagramma di Mollier, l'area della sezione dell'ugello in corrispondenza dei valori di pressione statica p pari a 0,8 MPa, 0,6 MPa, 0,546 MPa, 0,4 MPa e 0,2 MPa.

SOLUZIONE

Scendendo, sul diagramma di Mollier, lungo la verticale con entropia $s_0 = 7{,}3$ kJ/(kg·K), valore che corrisponde a $p_0 = 1$ MPa e $T_0 = 350$ °C, si intersecano via via le isobare contraddistinte dai valori assegnati di pressione p. Su queste si leggono entalpia h e volume massico ν. Si calcolano quindi la velocità v del vapore con la **31-11** $\left(v = \sqrt{2\left(h_0 - h\right)}\right)$ e l'area A della sezione con l'equazione di continuità **15-2** ($\dot{m} = Av/\nu \;\Rightarrow\; A = \dot{m}\nu/v$), ottenendo la tabella che segue. Come esempio, si sono riportati i calcoli della velocità e dell'area per la pressione $p = 0{,}8$ MPa.

p [MPa]	h [kJ/kg]	v [m/s]	ν [m^3/kg]	A [mm^2]
1	3157,7	0	0,2825	–
0,8	3100	340	0,34	3000
0,6	3022	521	0,42	2418
0,546	2998	565	0,45	2389
0,4	2922	687	0,57	2489
0,2	2775	875	0,98	3360

$$v = \sqrt{2\left(h_0 - h\right)} = \sqrt{2\left(3157{,}7 - 3100\right) \times 10^3 \text{ J/kg}} = 340 \text{ m/s}$$ ◀

$$A = \frac{\dot{m}v}{v} = \frac{3 \text{ kg/s} \times 0{,}34 \text{ m}^3\text{/kg}}{340 \text{ m/s}} = 0{,}003 \text{ m}^2 = 3000 \text{ mm}^2$$ ◀

COMMENTI

1. La pressione $p = 0{,}546$ MPa è la pressione critica, come risulta dal rapporto delle pressioni critiche che, per il vapore surriscaldato, vale (**31-20**):

$$p^*/p_0 = 0{,}546 \quad \Rightarrow \quad p^* = 0{,}546\, p_0 = 0{,}546 \times 1 \text{ MPa} = 0{,}546 \text{ MPa}$$

2. Alla pressione $p = p^* = 0{,}546$ MPa si raggiunge la velocità del suono nell'ugello ($c = v^* = 565$ m/s): il numero di Mach M è uguale a uno.

   Il raggiungimento di $M = 1$ è messo in evidenza anche dal fatto che, come risulta dalla tabella, al diminuire ulteriore della pressione l'area dell'ugello ritorna di nuovo ad aumentare. L'ugello deve avere cioè una configurazione convergente-divergente con un flusso subsonico nel tratto convergente e un flusso supersonico nel tratto divergente.

3. I dati di entalpia e volume massico riportati nella prima riga sono quelli dedotti dalla *Tabella A.3.3* relativi al vapore surriscaldato. Gli altri valori della tabella potevano essere ottenuti interpolando, lungo una linea a entropia costante, i dati della tabella del vapore surriscaldato.

31.10 Condotto semplicemente convergente

Nell'**ugello semplicemente convergente** di *Figura 31.12-a*, p_0 e T_0 sono rispettivamente pressione e temperatura di ristagno della corrente indisturbata a monte dove la velocità del gas è trascurabile ($v \approx 0$), p_U è la pressione nella sezione di uscita dell'ugello e p_C è la contropressione regolata dalla valvola. Nella parte inferiore della *Figura 31.12-a* è riportato il rapporto tra pressione locale e pressione di ristagno p/p_0, misurato lungo l'asse dell'ugello. La portata $\dot{m}$ e il rapporto delle pressioni all'uscita dell'ugello p_U/p_0 variano al variare della contropressione p_C secondo i diagrammi di *Figura 31.12-b*. Esaminiamo quattro valori decrescenti della contropressione p_C indicati con le lettere a, b, c, d nelle *Figure 31.12-a* e *31.12-b*.

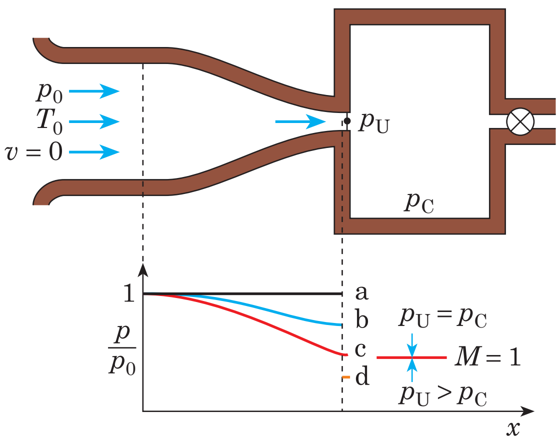

Fig. 31.12-a - Flusso comprimibile attraverso un ugello convergente.

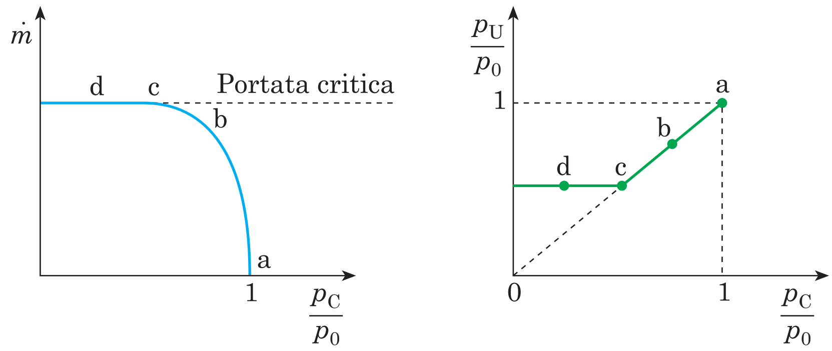

Fig. 31.12-b - Portata e pressione all'uscita di un ugello convergente in funzione della contropressione.

a) La contropressione p_C è uguale a p_0 ($p_C/p_0 = 1$). Non vi può essere nessun flusso di gas nell'ugello (la portata è zero) e nella sezione ristretta risulta $p_U/p_0 = 1$.
b) La contropressione p_C viene ridotta ($p_C/p_0 < 1$). Il rapporto delle pressioni p_C/p_0 si mantiene tuttavia sempre maggiore del rapporto critico espresso dalla **31-19** e quindi la velocità del gas è ancora subsonica. Al diminuire del rapporto p_C/p_0, la portata $\dot{m}$ inizia a salire e la pressione all'uscita p_U è uguale a p_C.
c) La contropressione p_C viene ridotta fino al valore critico p^* ($p_C/p_0 = p^*/p_0$) Nella sezione ristretta dell'ugello si raggiunge finalmente la velocità del suono; il numero di Mach è uguale a uno e la pressione all'uscita dell'ugello p_U è ancora uguale alla contropressione p_C.
d) La contropressione p_C viene ridotta ulteriormente e arriva a un valore inferiore alla pressione critica p^* ($p_C/p_0 < p^*/p_0$). In queste condizioni non si verifica alcun aumento di portata rispetto al caso precedente in quanto nella sezione minima dell'ugello la pressione di uscita p_U si conserva costante e uguale alla pressione critica p^* in corrispondenza di $M = 1$. La caduta di pressione si verifica questa volta al di fuori della sezione minima e precisamente tra questa e la valvola. Nell'ugello passa la massima portata compatibilmente con i valori della pressione e della temperatura di ristagno che esistono a monte dell'ugello; perciò la portata massima ormai non aumenta più, comunque si diminuisca la contropressione a valle.

Ugelli convergenti critici sono spesso utilizzati come strumenti di misura della portata. Essendo infatti nelle condizioni critiche la portata indipendente dalla contropressione, la misura di p_0, T_0 e dell'area critica A^* è sufficiente, per individuare la portata $\dot{m}$. Spesso gli ugelli critici vengono utilizzati come mezzi per mantenere un flusso stazionario in sistemi, come reattori chimici, indipendentemente dalle fluttuazioni di pressione nella camera di reazione.

31.11 Condotto convergente-divergente

Analogamente all'ugello semplicemente convergente, distinguiamo diversi casi a contropressione p_C decrescente nell'**ugello convergente-divergente** di *Figura 31.13*. In questa figura è stata anche riportata la variazione del numero di Mach M lungo l'asse del condotto.

a) La contropressione p_C è uguale a p_0 ($p_C/p_0 = 1$). La portata è nulla in quanto la pressione a monte è uguale alla pressione a valle.

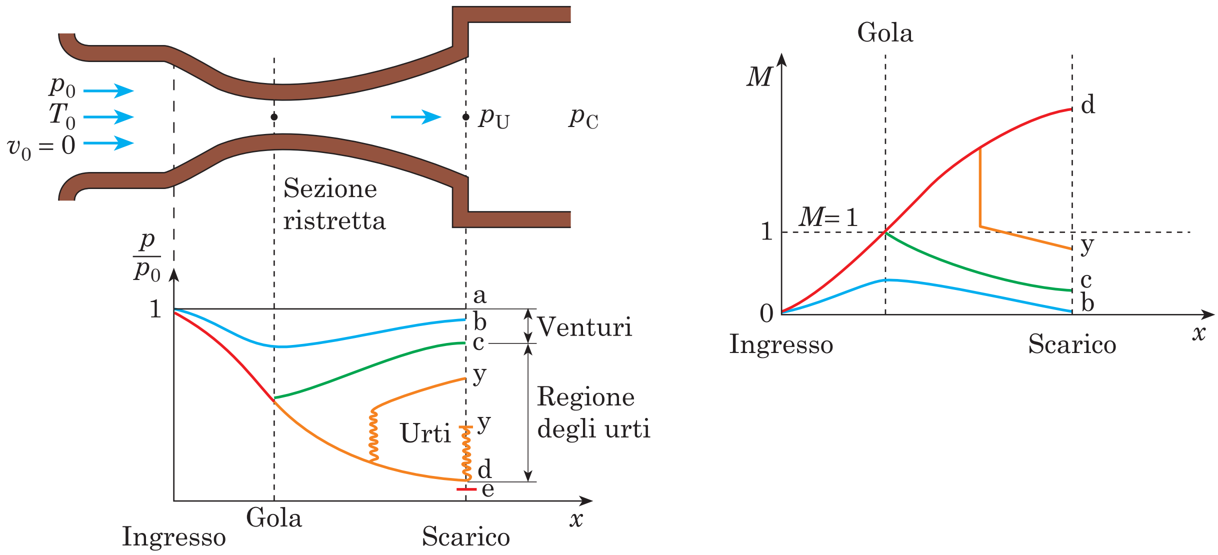

Fig. 31.13 - Flusso comprimibile attraverso un ugello convergente-divergente.

b) La contropressione p_C viene ridotta ($p_C/p_0 < 1$). Il rapporto delle pressioni p_C/p_0 è tuttavia maggiore del rapporto critico. La velocità del gas aumenta nel condotto convergente, ma nella sezione ristretta non viene raggiunta la velocità del suono e quindi, essendo il flusso subsonico, nel tratto divergente la velocità diminuisce e la pressione aumenta. Il condotto si comporta come un diffusore.

c) La contropressione p_C viene ridotta fino a un valore che permette di raggiungere la pressione critica p^* nella sezione ristretta dell'ugello. Nella sezione ristretta dell'ugello si raggiunge la velocità del suono, ma il tratto divergente si comporta come un diffusore subsonico, che ha all'ingresso $M = 1$, e così la pressione aumenta di nuovo e la velocità diminuisce. Fin qui il comportamento dell'ugello convergente-divergente è quello di un *tubo di Venturi*.

y) La contropressione p_C viene ancora ridotta ma non tanto da permettere di realizzare un'espansione supersonica fino all'uscita dell'ugello. Si raggiunge sempre la velocità del suono nella sezione ristretta; da qui inizia un'espansione supersonica nella prima parte del condotto convergente. Ma la contropressione è ancora troppo elevata; si forma un'onda d'urto che comprime il gas, portandolo a una pressione prossima alla contropressione p_C e a un numero di Mach inferiore a 1. L'onda d'urto è fonte di un tipico fenomeno dissipativo con notevole aumento di entropia. Mano a mano che diminuisce la contropressione, l'espansione supersonica si estende nel tratto divergente, ma non arriva a stabilirsi fino all'uscita dell'ugello.

d) La contropressione p_C viene finalmente ridotta a un valore tale per cui il flusso è supersonico in tutto il divergente. La velocità del suono, raggiunta dal gas nella sezione ristretta, viene progressivamente aumentata lungo tutto il divergente. L'espansione del gas continua fino all'uscita, dove la pressione p_U è uguale alla contropressione p_C, e avviene in modo isentropico in quanto non sono più presenti fenomeni dissipativi legati alla presenza di onde d'urto. In queste condizioni l'ugello supersonico si dice *adattato*.

e) La contropressione p_C diminuisce ancora. A questa ulteriore diminuzione della contropressione non corrisponde più una diminuzione della pressione all'uscita p_U. La caduta di pressione tra p_U e p_C avviene al di fuori dell'ugello.

SINTESI

Le *proprietà critiche* sono le proprietà del fluido che vengono raggiunte nella sezione minima dell'ugello dove il numero di Mach M è uguale a uno ($M = 1$).	$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$ **31-19**
Il *rapporto critico delle pressioni*, rapporto tra la pressione critica p^* e la pressione di ristagno p_0, è funzione di γ, rapporto tra la capacità termica massica a pressione costante c_p e quella a volume costante c_V.	p^* = pressione critica [kPa] p_0 = pressione di ristagno [kPa] γ = c_p/c_V = rapporto tra le capacità termiche [–]

ESERCIZI

31.7 - Nella sezione di un condotto viene misurata una temperatura statica $T = 900$ K. Calcolare la temperatura di ristagno T_0 dell'aria che scorre all'interno con la velocità v di 120 m/s oppure di 200 m/s.

$v = 120$ m/s $\Rightarrow$ $T_0 = 907$ K;
$v = 200$ m/s $\Rightarrow$ $T_0 = 920$ K

31.8 - Determinare volume massico ν e velocità del suono c nel vapore d'acqua che scorre in un condotto con la temperatura $T = 300$ °C e la pressione $p = 200$ kPa.

$c = 585$ m/s

31.9 - Calcolare la velocità del suono c e il numero di Mach M dell'aria che, alla temperatura $T = 600$ °C, scorre in un condotto con la velocità $v = 400$ m/s.

$c = 592$ m/s; $M = 0{,}67$

31.10 - Calcolare la velocità di efflusso v di un vapore sapendo che il salto entalpico vale $\Delta h = 120$ kJ/kg.

$v = 490$ m/s

31.11 - Da un condotto effluisce aria attraverso un ugello convergente con sezione di uscita $A_U = 520$ mm^2. Pressione e temperatura di ristagno a monte del convergente valgono rispettivamente $p_0 = 1042$ kPa e $T_0 = 400$ K. Calcolare la portata d'aria $\dot{m}$ allorché la pressione di uscita è $p_2 = 850$ kPa.

$\dot{m} = 0{,}87$ kg/s

31.12 - Nella sezione ristretta di un ugello convergente-divergente di area $A^* = 520$ mm^2 si raggiunge la velocità del suono. L'aria entra nell'ugello con pressione ristagno $p_0 = 1042$ kPa e temperatura di ristagno $T_0 = 400$ K. La pressione critica vale $p^* = 550$ kPa e la portata registrata alla pressione critica vale $\dot{m}^* = 1{,}094$kg/s. Calcolare pressione p_2, velocità dell'aria v_2 e area A_2 nella sezione di uscita dell'ugello per il numero di Mach $M_2 = 2{,}2$.

$p_2 = 97{,}5$ kPa; $v_2 = 628{,}5$ m/s; $A_2 = 1040$ mm^2

31.13 - Nella sezione ristretta di un ugello convergente-divergente di area $A^* = 520$ mm^2 si raggiunge la velocità del suono. L'aria entra nell'ugello con pressione ristagno $p_0 = 1042$ kPa e temperatura di ristagno $T_0 = 400$ K. La pressione critica vale $p^* = 550$ kPa e la portata registrata alla pressione critica vale $\dot{m}^* = 1{,}094$ kg/s. Calcolare pressione p_2, velocità dell'aria v_2 e area A_2 nella sezione di uscita dell'ugello per il numero di Mach $M_2 = 0{,}305$.

$p_2 = 977{,}5$ kPa; $v_2 = 121{,}1$ m/s; $A_2 = 1040$ mm^2

31.14 - Del vapore entra nell'ugello di una turbina con velocità nulla cosicché entalpia ed entropia coincidono con i valori di ristagno: $h_1 = h_0$ e $s_1 = s_0$. Determinare la velocità ideale del vapore all'uscita dell'ugello v_{2s} sapendo che il salto entalpico ideale è $\Delta h_s = 255$ kJ/kg e la velocità effettiva v sotto il salto entalpico effettivo $\Delta h = 220$ kJ/kg.

$v_{2s} = 714$ m/s; $v = 663$ m/s

VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO

8. Da un condotto effluisce aria attraverso un ugello convergente con sezione minima $A = 520\ mm^2$. Pressione e temperatura di ristagno a monte del convergente valgono rispettivamente $p_0 = 1042$ kPa e $T_0 = 400$ K. In queste condizioni nella sezione minima si raggiunge un numero di Mach uguale a 1: la pressione critica vale $p^* = 550$ kPa e la portata registrata in corrispondenza della pressione critica risulta $\dot{m}^* = 1{,}094$kg/s. Se nell'ambiente a valle della sezione minima dell'ugello convergente si realizza una pressione $p_2 = 400$ kPa inferiore al valore della pressione critica, la nuova portata d'aria $\dot{m}$ rispetto alla portata critica $\dot{m}^*$ risulta:

   a) $\dot{m} < \dot{m}^*$ b) $\dot{m} = \dot{m}^*$ c) $\dot{m} > \dot{m}^*$

9. Sulla sinistra del diagramma di Mollier del vapor d'acqua c'è una scala che consente di calcolare la velocità di efflusso del vapore v in funzione della variazione di entalpia Δh. In presenza di un $\Delta h = 500$ kJ/kg, la velocità vale $v =$ .... m/s.

10. Il processo di ristagno della corrente è un tipico processo irreversibile e quindi l'entropia dello stato generico s è diversa dall'entropia di ristagno s_0.

    Vero ☐ Falso ☐

11. Il nome dell'ugello convergente-divergente: ugello ....

12. L'ugello è un condotto accelerante in cui si vuole aumentare .... del fluido e diminuire .... Il diffusore è un condotto decelerante in cui si vuole diminuire .... e aumentare .... della corrente.

13. L'equazione del primo principio della termodinamica tra uno stato generico, individuato da entalpia h e velocità v, e lo stato in cui si verifica il ristagno della corrente si scrive ....

14. Del vapore entra con velocità nulla in un ugello di una turbina con pressione p_1 e temperatura T_1. Essendo nulla la velocità del vapore, i valori di entalpia ed entropia coincidono con quelli di ristagno del vapore a monte dell'ugello per cui è $h_1 = h_0$ e $s_1 = s_0$.

    Vero ☐ Falso ☐

15. Un flusso supersonico è caratterizzato da un numero di Mach M ...., mentre per il flusso subsonico il numero di Mach è M ....