

46.3.5 Sollecitazione a fatica di molle di compressione

Le molle a elica lavorano praticamente sempre a fatica soggette anche a milioni di cicli, si pensi ad esempio alle molle delle valvole di un motore ma non certo alla molla di un lucchetto soggetta al massimo a qualche centinaio di cicli. Vanno quindi progettate per una vita infinita. Al contrario degli alberi e di altri organi delle macchine soggetti a sollecitazioni alternate (*Figura 19.16-a* del secondo volume), le molle a elica non sono mai usate sia in compressione che in trazione. Essendo inoltre spesso assemblate con un precarico, sono soggette al ciclo di fatica della *Figura 19.16-b*; nel caso delle molle a elica, questo diagramma viene naturalmente tracciato in funzione della tensione tangenziale τ e non della tensione normale σ . La condizione peggiore di funzionamento a fatica della molla si registra quando, per l'assenza del precarico, è $\tau_{\min} = 0$.

Considerata la forza assiale di compressione F esercitata sulla molla, si possono definire il valor medio della forza F_m e la semiampiezza del ciclo della forza F_a :

$$F_m = \frac{F_{\max} + F_{\min}}{2} \qquad F_a = \left| \frac{F_{\max} - F_{\min}}{2} \right|$$

e calcolare l'ampiezza del ciclo di tensione τ_a e la tensione media τ_m con la **46-11** in modo da poter determinare (*Paragrafo 19.11.1*) la sollecitazione di fatica.

$$\tau_a = K_W \frac{8F_a D}{\pi d^3} \qquad \tau_m = K_W \frac{8F_m D}{\pi d^3}$$

Tenendo presente il tipo di fatica a cui è soggetta la molla e l'assenza di effetti di intaglio nella superficie (nel caso delle molle di compressione a elica il limite di fatica torsionale aumenta fino al 20% con la pallinatura che rende la superficie lucida e priva di intagli), la tensione tangenziale ammissibile a fatica delle molle a elica può essere calcolata in prima approssimazione dividendo la resistenza a trazione per un valore insolitamente basso ($n = 4 \div 5$) del fattore di sicurezza: $\tau_{\text{amm},f} = \sigma_u / (4 \div 5)$.

46.4 Barra di torsione

La barra di torsione di regola è costituita da un'asta rettilinea a sezione costante, in genere circolare, vincolata alle due estremità: da un lato alla struttura e dall'altro a una leva lunga b opportunamente incernierata alla cui estremità viene applicata la forza F che, rimanendo perpendicolare alla leva durante la deformazione, dà luogo a una coppia di momento torcente costante $M_t = Fb$ (Figura 46.15). Di particolare importanza sono i collegamenti che vengono spesso realizzati con un profilo scanalato.

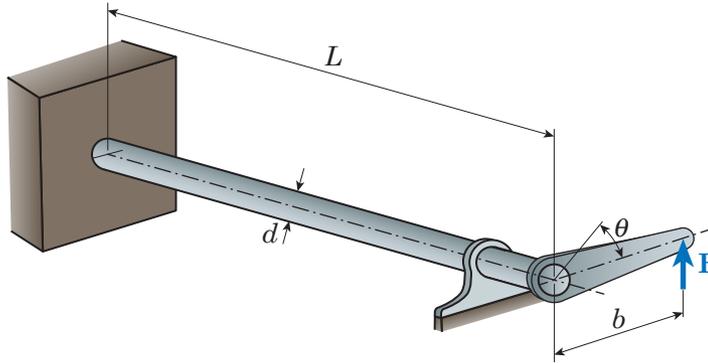


Fig. 46.15 - Carico F applicato a una barra di torsione di diametro d , lunga L e con braccio trasversale lungo b . Per evitare sollecitazioni di flessione che ne diminuiscono la resistenza viene applicato un supporto vicino all'estremità libera.

Ricordando l'espressione del modulo di resistenza a torsione di una sezione circolare (20-11') $Z_t = (\pi d^3)/16$, la tensione tangenziale massima τ_{\max} dovuta alla torsione della barra di diametro d (20-11) e prodotta dalla coppia di momento $M_t = Fb$ è data da:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{Z_t} = \frac{M_t}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{16}{\pi d^3} M_t \quad 46-18$$

L'angolo θ di rotazione relativa fra le due estremità della barra è uguale alla lunghezza della barra L moltiplicata per la deformazione tangenziale massima γ_{\max} (Figura 46.16). Quest'ultima è legata alla tensione massima dalla relazione $\gamma_{\max} = \tau_{\max}/G$ poiché il legame $\tau = G\gamma$ tra sforzi e deformazioni nella torsione è equivalente al legame $\sigma = E\varepsilon$ tra sforzo normale e deformazione assiale della 20-2.

$$\frac{d}{2}\theta = L\gamma_{\max} = L\frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{16}{\pi d^3} M_t \frac{L}{G} \Rightarrow \theta = \frac{16}{\pi d^3} M_t \frac{L}{G} \frac{2}{d} = \frac{32L}{G\pi d^4} M_t \quad 46-19$$

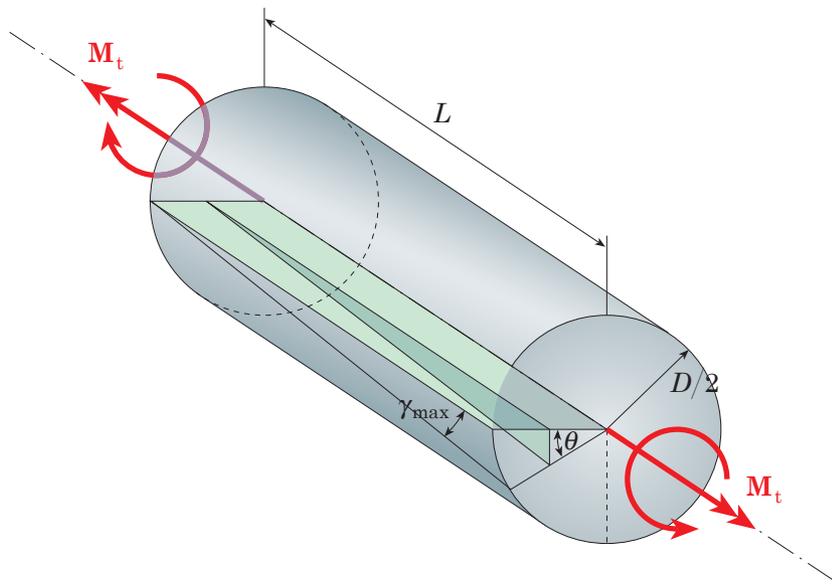


Fig. 46.16 - Relazione tra l'angolo di rotazione relativa fra le due estremità θ della barra lunga L e la deformazione tangenziale massima γ_{\max} .

Noto l'angolo di torsione θ , si ricava la rigidità torsionale^{46.6} della barra k come rapporto tra coppia M_t [N·mm] e θ [rad] al posto del rapporto tra forza F e freccia f della 46-1. La rigidità torsionale può anche essere espressa in funzione del momento di inerzia polare della sezione (Tabella VII): $J = (\pi d^4)/32$.

$$k = \frac{M_t}{\theta} = \frac{M_t}{\frac{32L}{G\pi d^4} M_t} = \frac{G\pi d^4}{32L} = \frac{GJ}{L} \quad 46-20$$

Nel dimensionamento della barra di torsione si può seguire quanto fatto con la molla elicoidale (Paragrafo 46.3.4) con il vantaggio che in questo caso non occorre più tener conto del fattore di Wahl. In particolare la freccia f , che coincide con lo spostamento del carico F , viene espressa in funzione della tensione tangenziale ammissibile τ_{amm} ($\tau_{\text{amm}} = \tau_{\text{max}}$) esplicitando la 46-18 rispetto alla coppia M_t : $M_t = \tau_{\text{amm}} \cdot [(\pi d^3)/16]$. Dall'equazione della freccia ricaviamo il diametro d della barra in funzione del braccio b della leva, della lunghezza L della barra e della freccia f oltre che delle proprietà meccaniche del materiale, τ_{amm} e G . La lunghezza della barra L non può essere variata perché il suo valore massimo è in pratica determinato dall'ingombro disponibile sul veicolo e così pure la freccia mas-

46.6 - Nello studio della flessione avevamo trovato la rigidità flessionale (EI) che, nel caso della torsione, aveva come equivalente (Paragrafo 20.5) la rigidità torsionale (*torsional rigidity*) data dal prodotto del modulo di elasticità tangenziale G per il momento di inerzia polare J : rigidità torsionale = GJ . In italiano si usa lo stesso termine di "rigidità torsionale" (*torsional stiffness*) per indicare la rigidità della barra $k = (GJ)/L$. A differenza dell'italiano, in inglese i due parametri diversi vengono chiamati in modo diverso.

sima f_{\max} , il diametro d risulta allora prevalentemente condizionato dalla lunghezza b del braccio trasversale.

$$f = \theta b = \left[\left(\frac{32L}{G\pi d^4} \right) M_t \right] b = \left[\left(\frac{32L}{G\pi d^4} \right) \tau_{\text{amm}} \cdot \frac{\pi d^3}{16} \right] b = \frac{2L\tau_{\text{amm}}b}{Gd} \Rightarrow d = \tau_{\text{amm}} \frac{2Lb}{Gf} \quad 46-21$$

Calcoliamo il fattore di utilizzazione m della barra di torsione ponendo al numeratore della **46-3** l'energia elastica effettiva come semiprodotto della coppia M_t per l'angolo di torsione θ e al denominatore l'energia massima di deformazione espressa in funzione della tensione tangenziale come avevamo fatto per la molla elicoidale.

$$\text{Volume della barra: } V = \frac{\pi d^2}{4} L$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} V \tau_{\max}^2 &= \frac{1}{2G} \left(\frac{1}{4} \pi d^2 L \right) \left(\frac{16}{\pi d^3} M_t \right)^2 = \frac{32L}{\pi G d^4} M_t^2 \\ m &= \frac{\frac{1}{2} M_t \theta}{\frac{1}{2G} V \tau_{\max}^2} = \frac{\frac{1}{2} M_t \frac{32L}{G\pi d^4} M_t}{\frac{32L}{\pi G d^4} M_t^2} = \frac{1}{2} \frac{\frac{32L}{\pi G d^4} M_t^2}{\frac{32L}{\pi G d^4} M_t^2} = 0,5 \end{aligned}$$

Si trova così un fattore di utilizzazione m della barra di torsione a sezione circolare piena uguale a 0,5 come nel caso della molla elicoidale. Ma se la barra di torsione è cava, ad esempio con una sezione a corona circolare, l'energia elastica U_m che può essere accumulata (numeratore della **46-3**) aumenta; essa infatti è tanto maggiore quanto minore è il momento di inerzia polare, che nel caso della sezione circolare piena era (*Tabella VII*) $J = (\pi d^4)/32$:

$$U_m = \frac{1}{2} M_t \theta = \frac{1}{2} \frac{32L}{\pi G d^4} M_t^2 = \frac{1}{2G} \frac{L}{\frac{\pi d^4}{32}} M_t^2 = \frac{1}{2G} \frac{L}{J} M_t^2$$

Il materiale viene sfruttato meglio con il coefficiente di utilizzazione che tende a 1 al decrescere dello spessore della corona circolare, oppure dello spessore di una qualsiasi altra sezione cava (configurazione a guscio tipica delle strutture aeronautiche), perché nello spessore τ varia di poco. C'è ovviamente un limite alla diminuzione dello spessore, limite che non è solo di natura tecnologica.

Le barre di torsione trovano numerose applicazioni, particolarmente in campo automobilistico (*Figura 46.17*). Anche la barra stabilizzatrice o barra antirollio ne è un esempio: si tratta di una barra vincolata al telaio della vettura e con le due estremità collegate a due ruote poste sullo stesso asse e parallele; ogni qual volta per un qualsiasi motivo (asperità terreno, curva ecc.) le sospensioni delle ruote assumono dei valori diversi per le frecce, si genera un momento torcente che tende a contrastare la causa deformante, con effetti stabilizzanti sul moto.

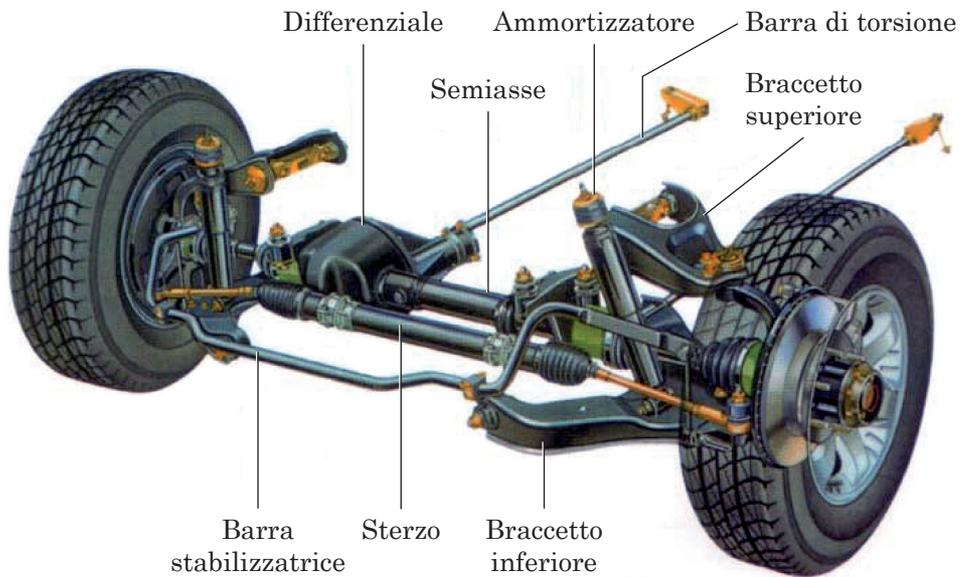


Fig. 46.17 - Configurazioni longitudinale (barra di torsione) e trasversale (barra stabilizzatrice) della barra nelle costruzioni automobilistiche.

SINTESI

Il diametro d della barra di torsione è funzione della lunghezza del braccio trasversale b e della barra L , della freccia f e delle proprietà meccaniche del materiale, τ_{amm} e G .

Tenendo presente che la lunghezza della barra L è in pratica fissata dall'ingombro disponibile sul veicolo e così pure la freccia massima f_{max} , il diametro d risulta prevalentemente condizionato dalla lunghezza b del braccio trasversale.

$$d = \tau_{\text{amm}} \frac{2Lb}{Gf}$$

46-21

d = diametro della barra di torsione [mm]

τ_{amm} = tensione tangenziale ammissibile [N/mm²]

L = lunghezza della barra [mm]

b = braccio trasversale della barra [mm]

G = modulo di elasticità tangenziale [MPa]

f = freccia [mm]

ESERCIZI

46.6 - Calcolare il diametro d di una barra di torsione in acciaio legato 55 Si 7 ($G = 79$ GPa) di cui sono assegnati lunghez-

za della barra $L = 0,9$ m, lunghezza del braccio trasversale $b = 60$ mm, freccia massima $f = 20$ mm.

$$d = 18,5 \text{ mm}$$

VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO

9. Nel caso delle molle di compressione a elica il limite di fatica torsionale aumenta fino al 20% con il trattamento superficiale di che rende la superficie lucida e priva di intagli.
10. Nell'equazione della tensione tangenziale della barra di torsione figura il fattore di Wahl come nel caso della molla elicoidale.

Vero Falso