

1 Progettazione a torsione con limitazione delle deformazioni

Talvolta il progettista deve prendere in considerazione non solo la limitazione delle tensioni interne, che non dovranno superare il carico unitario di sicurezza, ma anche la limitazione delle deformazioni, che in certi casi risulta più restrittiva del vincolo della tensione ammissibile.

Nel caso della torsione, tale deformazione consiste nella rotazione relativa, misurata dall'angolo di torsione ϑ , che una qualunque sezione subisce rispetto a un'altra.

Dal punto di vista delle formule di calcolo, la condizione che l'angolo di torsione non possa superare un determinato valore limite, imposta dallo stesso progettista per esigenze funzionali, assume la forma:

$$\vartheta = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} \leq \vartheta_{\text{tot max}}$$

dove con $\vartheta_{\text{tot max}}$ si è indicato l'angolo massimo di torsione tollerabile tra due sezioni distanti l tra loro.

Dividendo per l ambedue i membri della precedente relazione si ottiene:

$$\frac{M_t}{G \cdot I_p} \leq \frac{\vartheta_{\text{tot max}}}{l} = \left(\frac{\vartheta}{\text{metro}} \right)_{\text{max}}$$

avendo indicato con $\left(\frac{\vartheta}{\text{metro}} \right)_{\text{max}}$ il massimo angolo di torsione consentito per ogni metro di lunghezza dell'albero.

1.1 Progettazione di un albero di trasmissione con limitazione dell'angolo di torsione

Talvolta capita che a un albero di trasmissione venga posta una limitazione (misurando l'angolo di torsione ϑ in gradi) del tipo:

$$\left(\frac{\vartheta^\circ}{\text{metro}} \right)_{\text{max}} = 0,25 \text{ gradi/metro}$$

ovvero, il rapporto tra l'angolo di torsione ϑ rilevabile tra due sezioni distanti tra loro l metri e la loro distanza l , non può superare 0,25 gradi per ogni metro di lunghezza dell'albero.

Ricordando la relazione che intercorre tra la misura di un angolo in gradi e quella in radianti, e cioè:

$$\vartheta \text{ (rad)} = \vartheta^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$$

risulta:

$$0,25^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 0,004363 \text{ rad}$$

Pertanto, la stessa limitazione precedente, se l'angolo viene misurato in radianti, diviene:

$$\left(\frac{\vartheta \text{ rad}}{\text{metro}} \right)_{\max} = 0,004363 \text{ radianti/metro}$$

Per una sezione circolare piena il momento d'inerzia polare di superficie I_p è dato dalla relazione:

$$I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32}$$

quindi l'espressione:

$$\frac{M_t}{G \cdot I_p} \leq \frac{\vartheta_{\text{tot max}}}{l} = \left(\frac{\vartheta}{\text{metro}} \right)_{\max}$$

diviene:

$$\frac{\vartheta_{\text{tot max}}}{l} = \frac{M_t}{G \cdot \frac{\pi \cdot D^4}{32}} = \frac{32 \cdot M_t}{\pi \cdot G \cdot D^4} \leq \left(\frac{\vartheta}{\text{metro}} \right)_{\max}$$

Da quest'ultima relazione si ricava:

$$D^4 \geq \frac{32 \cdot M_t}{\pi \cdot G \cdot \left(\frac{\vartheta}{\text{metro}} \right)_{\max}}$$

ovvero:

$$D_{\min} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_t}{\pi \cdot G \cdot \left(\frac{\vartheta}{\text{metro}} \right)_{\max}}}$$

Tale relazione può anche scriversi:

$$D_{\min} = \left(\frac{32 \cdot M_t}{\pi \cdot G \cdot \left(\frac{\vartheta}{\text{metro}} \right)_{\max}} \right)^{0,25}$$

ovvero:

$$D_{\min} = \left(\frac{32 \cdot M_t \cdot l}{\pi \cdot G \cdot \vartheta_{\text{tot max}}} \right)^{0,25}$$

dove $\vartheta_{\text{tot max}}$ indica l'angolo massimo di torsione tollerabile tra due sezioni distanti l tra loro.

Con analogo procedimento, per una sezione circolare cava con rapporto di cavità:

$$\chi = \frac{d}{D}$$

dove con d e D si sono indicati rispettivamente il diametro interno e il diametro esterno della sezione, si ottiene:

$$D_{\min} = \left(\frac{32 \cdot M_t}{\pi \cdot G \cdot \left(\frac{\vartheta}{\text{metro}} \right)_{\max} \cdot (1 - \chi^4)} \right)^{0,25}$$

ovvero:

$$D_{\min} = \left(\frac{32 \cdot M_t \cdot l}{\pi \cdot G \cdot \vartheta_{\text{tot max}} \cdot (1 - \chi^4)} \right)^{0,25}$$