

## Dimostrazione della costanza del rapporto di trasmissione se i profili dei denti sono coniugati

### Premessa

Prendiamo in considerazione un ingranaggio cilindrico a denti dritti (Figura 1) ed esaminiamone le condizioni di contatto tra i profili, che si suppongono coniugati. La circonferenza primitiva della ruota motrice ha centro in  $O_1$  e raggio  $r_1$  ed è tangente in C alla circonferenza primitiva della ruota condotta, di centro  $O_2$  e raggio  $r_2$ .

A è il punto di contatto di due denti accoppiati. La velocità di questo punto, se pensato appartenente alla ruota motrice vale:

$$v_{A1} = \overline{O_1A} \cdot \omega_1 \quad (1)$$

con  $\omega_1$  = velocità di rotazione di tale ruota;  $v_{A1}$  è rappresentata da un vettore tangente alla circonferenza di centro  $O_1$  e raggio  $\overline{O_1A}$ .

Se invece si considera A appartenente alla ruota condotta, la sua velocità è:

$$v_{A2} = \overline{O_2A} \cdot \omega_2 \quad (2)$$

dove  $\omega_2$  è la velocità di rotazione di quest'ultima ruota;  $v_{A2}$  è rappresentata da un vettore tangente alla circonferenza di centro  $O_2$  e raggio  $\overline{O_2A}$ .

I vettori  $\overrightarrow{v_{A1}}$  e  $\overrightarrow{v_{A2}}$  hanno generalmente diverso orientamento; però, affinché i due denti a contatto (o, come si dice anche, *in presa*) non si urtino né si distacchino durante il funzionamento, è necessario che le componenti di  $\overrightarrow{v_{A1}}$  e  $\overrightarrow{v_{A2}}$  ( $\overrightarrow{v_{1n}}$  e  $\overrightarrow{v_{2n}}$ ), normali a entrambi i profili, siano uguali o, in altri termini, che la velocità relativa dei due profili, in direzione normale alla superficie di contatto, sia nulla.

### Se i profili sono coniugati, $i = \text{cost.}$ : dimostrazione

Dimostriamo ora che se i profili che vengono a contatto sono coniugati, il rapporto di trasmissione resta costante. Con riferimento alla Figura 1, essendo i profili dei due denti a contatto per ipotesi coniugati, la retta  $n-n$  dovrà necessariamente passare per C.

Le componenti  $v_{1n}$  e  $v_{2n}$  sono le proiezioni rispettivamente dei vettori  $\overrightarrow{v_{A1}}$  e  $\overrightarrow{v_{A2}}$  sulla retta  $n-n$  e valgono:

$$v_{1n} = v_{A1} \cdot \cos \alpha_1 \quad (3)$$

$$v_{2n} = v_{A2} \cdot \cos \alpha_2 \quad (4)$$

dove  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono gli angoli formati dai vettori  $\overrightarrow{v_{A1}}$  e  $\overrightarrow{v_{A2}}$  con la retta  $n-n$ . Per quanto s'è detto, dovendo essere:

$$v_{1n} = v_{2n} \quad (5)$$

sarà anche:

$$v_{A1} \cdot \cos \alpha_1 = v_{A2} \cdot \cos \alpha_2 \quad (6)$$

Sulla base delle espressioni (1) e (2), la (6) diviene:

$$\overline{O_1A} \cdot \omega_1 \cdot \cos \alpha_1 = \overline{O_2A} \cdot \omega_2 \cdot \cos \alpha_2$$

da cui:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\overline{O_2A} \cdot \cos \alpha_2}{\overline{O_1A} \cdot \cos \alpha_1} \quad (7)$$

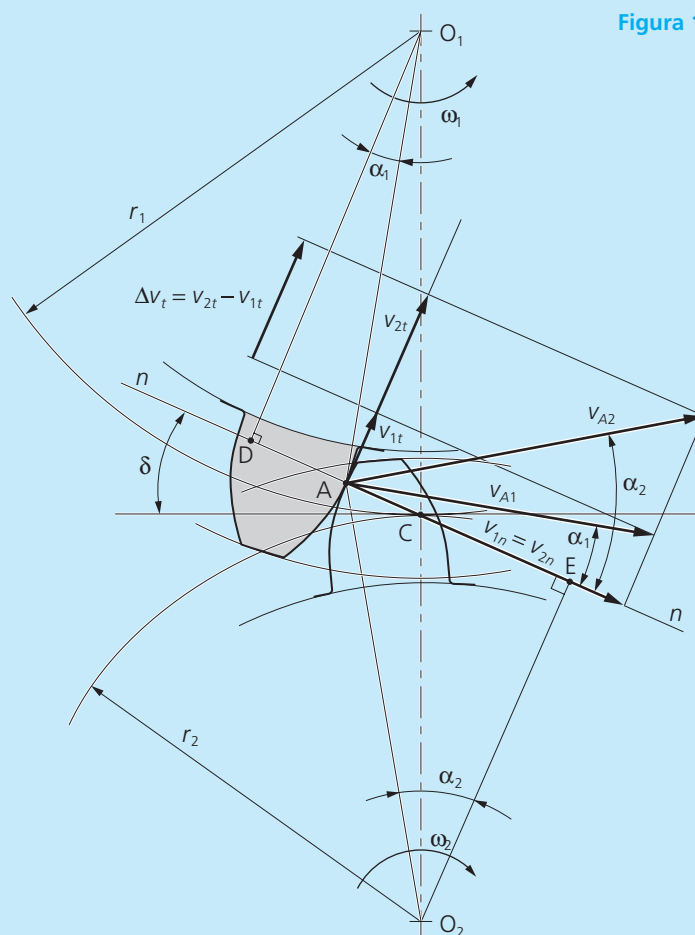


Figura 1

Dall'esame della figura citata risulta anche che:

$$\overline{O_2E} = \overline{O_2A} \cdot \cos \alpha_2$$

$$\overline{O_1D} = \overline{O_1A} \cdot \cos \alpha_1$$

dove E e D sono i piedi delle perpendicolari condotte da  $O_2$  e  $O_1$  sulla retta  $n-n$ , per cui la (7) può scriversi:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\overline{O_2E}}{\overline{O_1D}} \quad (8)$$

Dalla similitudine dei triangoli  $\widehat{O_1DC}$  e  $\widehat{O_2EC}$  si ricavano le relazioni:

$$\frac{\overline{O_2E}}{\overline{O_1D}} = \frac{\overline{O_2C}}{\overline{O_1C}}$$

Essendo infine:  $\overline{O_2C} = r_2$  e  $\overline{O_1C} = r_1$ , la (8) diviene:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (9)$$

Possiamo allora affermare che il rapporto di trasmissione di un ingranaggio cilindrico a denti dritti è pari al rapporto tra il raggio della circonferenza primitiva della ruota condotta e il raggio della circonferenza primitiva della ruota motrice. Pertanto, se i due profili sono coniugati, ovvero se la normale in A, comune ai due profili, passa per il centro di istantanea rotazione C, risulta:

$$i = \frac{r_2}{r_1}$$

Quindi, essendo costante il rapporto tra i raggi, in quanto entrambi sono costanti, sarà anche  $i = \text{cost.}$