2.3.2 Richiami di trigonometria

Anticipiamo alcune nozioni di *trigonometria* estratte dall'*Appendice A.2* che ci accompagneranno per tutta l'Unità. I numeri di equazioni, figure e tabelle, quando preceduti dalla lettera "A", si riferiscono a equazioni, figure e tabelle dell'*Appendice*.

In un triangolo la somma degli angoli è uguale a 180°: $\alpha + \beta + \gamma = 180° = \pi$ radianti. Così se vogliamo ottenere l'angolo β (*Esempio 2.2*) possiamo scrivere: $\beta = \pi - \alpha - \gamma = \pi - (\alpha + \gamma)$.

Nel *triangolo rettangolo* (*Figura A.2.5-a* dell'*Appendice* oppure *Tabella IV* di copertina) il lato più lungo, opposto all'angolo retto β, è l'*ipotenusa* b, mentre gli altri due lati si chiamano *cateti*. Il *teorema di Pitagora* afferma che il quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui due cateti:

$b^2 = a^2 + c^2$ << Teorema di Pitagora >> **A.2-2**

Alla fine dell'*Esempio 2.3* dobbiamo calcolare l'intensità della risultante R di componenti R_x ed R_y secondo gli assi x e y. Applicando la **A.2-2**, abbiamo:

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

Le principali funzioni trigonometriche sono *seno*, *coseno* e *tangente*; qualche volta è conveniente usare il reciproco della tangente, che prende il nome di *cotangente*:

$$\sin\alpha = \frac{\text{cateto opposto ad}\,\alpha}{\text{ipotenusa}} = \frac{a}{b} \quad \textbf{A.2-3} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{cateto adiacente ad}\,\alpha}{\text{ipotenusa}} = \frac{c}{b} \quad \textbf{A.2-4}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opposto ad}\,\alpha}{\text{cateto adiacente ad}\,\alpha} = \frac{a}{c} \quad \textbf{A.2-5} \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \quad \textbf{A.2-6}$$

Ad esempio (*Figura 2.16-a*), la componente F_x della forza F lungo l'asse x è il cateto adiacente ad α del triangolo rettangolo avente come ipotenusa F. Ma, per la **A.2-4**, il cateto c è il prodotto dell'ipotenusa b per cos α: $c = b \cos \alpha$. Operate le sostituzioni, possiamo scrivere $F_x = F \cos \alpha$. Analogamente, la componente F_y della forza F lungo l'asse y è il cateto opposto ad α (segmento tratteggiato verticale) del triangolo rettangolo avente come ipotenusa F. Per la **A.2-3**, il cateto a è il prodotto dell'ipotenusa b per sin α: $a = b \sin \alpha$; avremo così $F_y = F \sin \alpha$. Infine il rapporto tra le due componenti della forza verticale e orizzontale (F_y ed F_x) rappresenta per la **A.2-5** la tangente di α: $F_y/F_x = \tan \alpha$.

Nota la funzione trigonometrica, si può ricavare l'angolo mediante la *funzione inversa*, designata aggiungendo il prefisso "arc" alla funzione stessa come $\alpha = \arcsin x$ che significa appunto arco il cui seno è x:

$$\alpha = \arcsin x \qquad \alpha = \arccos y \qquad \alpha = \arctan z \quad \textbf{A.2-12}$$

Si veda l'ultima equazione dell'*Esempio 2.1*: $\sin\alpha = 0{,}254 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin 0{,}254 = 14{,}71° \approx 15°$

Le funzioni trigonometriche possono essere rappresentate in un cerchio di raggio unitario (*Figura A.2.6*) nel quale l'angolo α positivo viene misurato nel senso antiorario a partire dal semiasse x positivo; in questo cerchio viene inscritto un triangolo rettangolo avente un'ipotenusa di lunghezza 1. Tutte e tre le funzioni (seno, coseno e tangente) sono positive per angoli $0° \leq \alpha \leq 90°$; per angoli $90° < \alpha \leq 180°$ solo il seno risulta positivo. Per riassumere il segno di ciascuna funzione trigonometrica viene utilizzato il concetto di quadrante: gli angoli fino a 90° appartengono al quadrante I, quelli tra 90° e 180° sono nel quadrante II e così via. In accordo con la *Figura A.2.6*, la *Tabella A.2.1* riassume le relazioni tra le funzioni trigonometriche al variare dell'angolo α. Applichiamo queste relazioni agli *Esempi 2.1* e *2.3*:

$$\sin\beta = \sin\left[\pi - \left(\alpha + \gamma\right)\right] = \sin\left(\alpha + \gamma\right) \quad [\textit{Tabella A.2.1}\text{: } \sin\alpha = \sin\left(\pi - \alpha\right) = +\sin\alpha]$$

$$\cos 110° = \cos\left(90° + 20°\right) = -\sin 20° \quad [\textit{Tabella A.2.1}\text{: } \cos\left(90° + \alpha\right) = -\sin\alpha]$$

$$\sin 345° = \sin\left(360° - 15°\right) = \sin\left(-15°\right) = -\sin 15° = -0{,}259 \quad (\textit{Figura A.2.6})$$

$$\cos 345° = \cos\left(360° - 15°\right) = \cos\left(-15°\right) = +\cos 15° = 0{,}966 \quad (\textit{Figura A.2.6})$$

Queste relazioni consentono di riportarci a un angolo minore di 90° (si veda anche il Manuale di Meccanica sotto la Tab. A.9: *Archi associati e riduzione al primo quadrante*). Non sono però indispensabili: si potrebbe impostare direttamente sulla calcolatrice "cos 345°" e ricavare "0,96592...". L'importante è controllare che la calcolatrice sia impostata correttamente nell'unità che avete assegnato all'angolo: gradi ("DEG" per *degree*) o radianti ("RAD"). Se volete operare con gli angoli espressi in gradi, verificate, prima di iniziare i calcoli, che il seno di 30°, oppure il cos di 60°, vi dia come risultato 0,5.

Il caso generale è rappresentato dal *triangolo qualunque* di angoli α, β e γ (*Figura A.2.8* dell'*Appendice* oppure *Tabella V* di copertina). Il caso generale comprende quindi il triangolo rettangolo come caso particolare. Al triangolo qualunque si applicano due relazioni:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \qquad \text{<< Teorema del coseno (o di Carnot) >>} \qquad \textbf{A.2-13}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \qquad \text{<< Teorema dei seni (o di Eulero) >>} \qquad \textbf{A.2-14}$$

Nell'*Esempio 2.1* (*Figura 2.12-d*) la risultante R (di fronte all'angolo β) delle due forze F_2 ed F_1 è per il teorema del coseno:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \;\Rightarrow\; R^2 = F_2^2 + F_1^2 - 2F_2F_1\cos\beta = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\beta$$

Applichiamo il teorema dei seni all'*Esempio 2.2* (*Figura 2.15-c*), dove $a = F_2$ è il lato opposto all'angolo α, $b = F$ è il lato opposto a β e $c = F_1$ ha di fronte γ:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \;\Rightarrow\; \frac{F_2}{\sin\alpha} = \frac{F}{\sin\beta} = \frac{F_1}{\sin\gamma} \;\Rightarrow\; \frac{F_1}{\sin\gamma} = \frac{F_2}{\sin\alpha} = \frac{F}{\sin\beta}$$